



Unidad I. Diferenciales, antiderivadas e integral indefinida



DIFERENCIALES, ANTIDERIVADAS E INTEGRAL INDEFINIDA



Propósito de la Unidad

- Aplica la diferencial y la integral indefinida en la resolución de problemas de las ciencias exactas, naturales y de economía que le den significado mediante su uso.



Núcleos Básicos

- 1.1. Diferencial de una función
- 1.2. Antiderivadas o primitivas de una función
- 1.3. Integral indefinida
- 1.4. Aplicaciones de la integral indefinida



INSTRUCCIONES: Revisa los ejercicios propuestos. Posteriormente consulta el material de apoyo (los recursos se encuentran al final del documento), realiza la lectura del libro Cálculo II de la página _____. Al finalizar la consulta, resuelve los ejercicios que aquí se proponen desarrollando en cada uno el proceso que demuestre la solución correcta.

Prepara las dudas para que las expongas y que sean atendidas en la sesión de la videoconferencia.

Conceptos

Aproximar el valor de la variación Δy mediante la diferencial dy

El valor de la variación Δy para un incremento determinado $\Delta x = x - x_0$ se puede aproximar mediante la diferencial

$$dy = f'(x_0) \cdot dx, \text{ donde } dx = \Delta x \text{ y } f'(x_0) \neq 0.$$

La diferencial dy también se usa para aproximar el incremento Δy , y el error de aproximación $|\Delta y - dy|$ depende de la variación $\Delta x = x - x_0$ de la variable independiente.

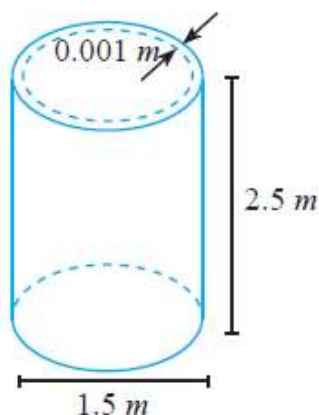
Cuando se nos pide calcular un valor aproximado de la variación de la variable dependiente de una función para variaciones pequeñas de la variable independiente, como en los ejemplos que veremos a continuación, es más fácil calcular la diferencial correspondiente a la variable dependiente y usar este valor, en vez de la variación.

Ejemplo

1. Un tanque cilíndrico tiene una altura de 2.5 metros y un diámetro de 150 centímetros. Si en la parte interior (no a la tapa ni a la base) se le coloca una capa de pintura de 1 milímetro, determina:
 - a) La variación en el volumen ΔV .
 - b) La aproximación de la variación del volumen dV .
 - c) El error de aproximación $|\Delta V - dV|$.



Resolución:



a) Fórmula del volumen del cilindro: $V(r) = \pi r^2 h$

Debemos calcular: $\Delta V = V(r) - V(r_0)$

Radio del cilindro original: $r_0 = 0.75 \text{ m}$

Radio del cilindro con la capa de pintura: $r = 0.75 - 0.001 = 0.749 \text{ m}$

$$V(0.749) = \pi(0.749)^2(2.5) \text{ m}^3 \quad \text{y} \quad V(0.75) = \pi(0.75)^2(2.5) \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(r) - V(r_0) \\ &= \pi(0.749)^2(2.5) - \pi(0.75)^2(2.5) \\ &= 2.5\pi[(0.749)^2 - (0.75)^2] \\ &= -0.0037475\pi \text{ m}^3 \end{aligned}$$

La variación en el volumen es de: $-0.0037475\pi \text{ m}^3$

b) La altura h en el volumen del cilindro es fija, entonces: $V(r) = 2.5\pi r^2$

Debemos calcular: $dV = V'(r_0) dr$, donde $V'(r_0) = 5\pi r_0$

Radio del cilindro original: $r_0 = 0.75 \text{ m}$

Razón de cambio en el volumen cuando $r_0 = 0.75 \text{ m}$: $V'(0.75) = (5)(0.75)\pi = 3.75\pi \text{ m}^2$

La diferencial de r : $dr = r - r_0 = -0.001 \text{ m}$

La diferencial de V : $dV = (3.75\pi)(-0.001) = -0.00375\pi \text{ m}^3$

Cuando se coloca una capa de pintura de un 1 milímetro de espesor a la pared interior del cilindro, la variación aproximada en el volumen es $-0.00375\pi \text{ m}^3$.

c) **Debemos calcular:** $|\Delta V - dV|$.

$$|\Delta V - dV| = |-0.0037475\pi - (-0.00375\pi)| = 0.0000025\pi \text{ m}^3$$

El error de aproximación es de $0.0000025\pi \text{ m}^3$



2. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5.05 centímetros. Determina el valor aproximado del incremento del área.

Resolución:

Fórmula del área del disco: $A(r) = \pi r^2$

Debemos calcular: $dA = A'(r_0)dr$, donde $A'(r_0) = 2\pi r_0$

Radio del disco original: $r_0 = 5 \text{ cm}$

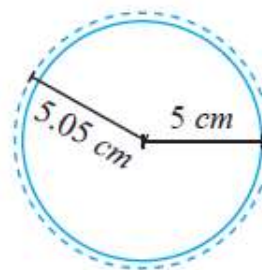
Radio del disco dilatado: $r = 5.05 \text{ cm}$

Razón de cambio en el área cuando $r_0 = 5 \text{ cm}$: $A'(5) = 2(5)\pi = 10\pi \text{ cm}$

La diferencial de r : $dr = r - r_0 = 5.05 - 5 = 0.05 \text{ cm}$

La diferencial de A : $dA = (10\pi)(0.05) = 0.5\pi \text{ cm}^2$

Cuando el disco metálico se dilata 0.05 centímetros por la acción del calor, la variación aproximada en el área es $0.5\pi \text{ cm}^2$.



Ejercicios. Resuelve las ecuaciones siguientes y comprueba la solución.

1. Una bola de hielo de 10 centímetros de radio, se derrite hasta que su radio adquiera el valor de 9.08 centímetros. Halla aproximadamente, la disminución que experimenta su volumen.
2. Un contratista acuerda pintar ambos lados de 1 000 rótulos redondos, cada uno de los cuales tiene un radio de 3 metros. Al recibir los rótulos, se da cuenta que el radio tiene 1 centímetro más. Usa diferenciales para aproximar el incremento de la pintura que necesitará.
3. En una placa cuadrada de circuitos para un procesador, con el incremento en la temperatura que se genera por el funcionamiento del procesador, se produce una dilatación lineal de los lados de la placa del 0.3%. El lado de cada placa mide 7 milímetros, aproxima por diferenciales el aumento en el área de la placa.



ANTIDERIVADAS O PRIMITIVAS DE UNA FUNCIÓN

INSTRUCCIONES: Revisa los ejercicios propuestos. Posteriormente consulta el material de apoyo que te proporcionará el profesor y realiza la lectura del libro Cálculo II de la página _____. Al finalizar la consulta, resuelve los ejercicios que aquí se proponen desarrollando en cada uno el proceso que demuestre la solución correcta.

Prepara las dudas para que las expongas y que sean atendidas en la sesión de la videoconferencia.

Conceptos, ejemplos y ejercicios

Recordemos que, en cálculo diferencial, a partir de una función f calculamos su derivada f' , ahora, dada una función f , debemos encontrar una función F tal que $F' = f$.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 3x$ determina $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Al derivar $F(x) = \frac{3x^2}{2}$, se tiene que $F'(x) = \frac{(2)(3)x}{2} = 3x$, por lo que $F'(x) = f(x)$.

En la siguiente actividad propongamos la función F cuya derivada sea f , para ello podemos usar una tabla de derivadas vista en Cálculo I.

Determina una función F cuya derivada sea f . ¿Qué estrategia vas a usar para determinar F ?

- | | | | |
|---------------------------------|----------------|---------------------------|----------------|
| a) $f(x) = 0$ | $F(x) =$ _____ | b) $f(x) = 1$ | $F(x) =$ _____ |
| c) $f(x) = -5$ | $F(x) =$ _____ | d) $f(x) = 2x$ | $F(x) =$ _____ |
| e) $f(x) = 3x^2$ | $F(x) =$ _____ | f) $f(x) = e^x$ | $F(x) =$ _____ |
| g) $f(x) = x^5$ | $F(x) =$ _____ | h) $f(x) = x^6$ | $F(x) =$ _____ |
| i) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $F(x) =$ _____ | j) $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) =$ _____ |
| k) $f(x) = 6^x \ln 6$ | $F(x) =$ _____ | l) $f(x) = \cos x$ | $F(x) =$ _____ |
| m) $f(x) = -\sin x$ | $F(x) =$ _____ | n) $f(x) = \sec^2 x$ | $F(x) =$ _____ |
| ñ) $f(x) = -\csc^2 x$ | $F(x) =$ _____ | o) $f(x) = \sec x \tan x$ | $F(x) =$ _____ |

En el ejemplo anterior, observemos que la función $F(x)$ propuesta, es una antiderivada o primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = f(x)$. Sin embargo, falta precisar el intervalo donde se satisface que $F'(x) = f(x)$ para cada x en dicho intervalo.



Definición de una antiderivada o primitiva de f

Una función $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de la función $f(x)$ sobre un intervalo, si para cada x en el intervalo, se tiene que $F'(x) = f(x)$.

Como consecuencia del comportamiento de F en un punto dado, al determinar los valores de x en los que se satisface que $F'(x) = f(x)$, nos podemos encontrar casos en los que se tiene más de un intervalo.

Ejemplo

Determina una antiderivada $F(x)$ de las funciones dadas.

a) $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.

Si $F(x) = \frac{x}{2}$, entonces $F'(x) = \frac{1}{2}$ para cada $x \in (-\infty, +\infty)$.

b) $f(x) = \frac{2}{x}$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $F(x) = \ln(x^2)$, entonces $F'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ para cada $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

De acuerdo con el ejemplo anterior, para obtener una antiderivada $F(x)$, usamos las fórmulas básicas de derivación vistas en cálculo diferencial, por lo que podemos decir que a este proceso se le llama antiderivación o integración.

Por otra parte, hemos hablado de que $F(x)$ es **una antiderivada o primitiva** de la función $f(x)$, y no, la antiderivada o primitiva de $f(x)$. Esto se debe a lo que veremos a continuación.

Determina seis antiderivadas de la función $f(x) = x^3$.

1) $F(x) =$ _____

2) $F(x) =$ _____

3) $F(x) =$ _____

4) $F(x) =$ _____

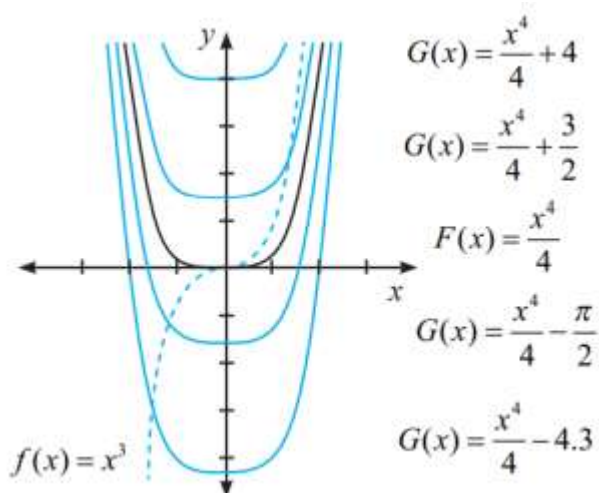
5) $F(x) =$ _____

6) $F(x) =$ _____

Como podemos observar, la antiderivada de $f(x) = x^3$ no es única, es por ello que se habla de una antiderivada de $f(x)$, en consecuencia, proponemos el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, y C una constante real, entonces $G(x) = F(x) + C$ es también una primitiva de la función $f(x)$.

Del Teorema 1, se deduce que a una antiderivada o primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$, si se le suma o se le resta un número real, esta sigue siendo una antiderivada de la función $f(x)$. Veamos esto mediante la siguiente representación gráfica.



De la representación gráfica, observamos que cada una de las antiderivadas de $f(x) = x^3$ es una traslación vertical de la antiderivada $F(x) = \frac{x^4}{4}$, es decir, $G(x) = \frac{x^4}{4} + C$ es una familia de antiderivadas de $f(x) = x^3$, las cuales difieren en una constante real C .

El siguiente teorema nos dice cualquier antiderivada de f debe ser de la forma

$$G(x) = F(x) + C$$

Es decir, **dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho en una constante real.**

Teorema 2. Si $G'(x) = F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$, entonces $G(x) - F(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$ y C una constante real.

Como consecuencia del Teorema 1 y del Teorema 2, $G(x) = F(x) + C$ representa a la familia de antiderivadas de $f(x)$. En cuanto a la constante real C , se le denomina constante de integración.



Ejemplo

Determina la familia de antiderivadas o primitivas G de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

La familia de primitivas de $f(x) = x + x^2$ está formada por la familia de funciones

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C, \text{ pues } G'(x) = x + x^2 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

La familia de antiderivadas de $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ es la familia de funciones $G(x) = \sqrt[3]{x} + C$, pues

$$G'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ para cada } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

c) $f(x) = \sec^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ y k entero impar.

La familia de antiderivadas de $f(x) = \sec^2 x$ es la familia de funciones $G(x) = \tan x + C$, ya que

$$G'(x) = \sec^2 x, \text{ para cada } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ y } k \text{ entero impar.}$$

Hemos visto que la antiderivada o primitiva de $f(x)$ no es única, es decir, existe una infinidad de funciones de la forma $F(x) + C$ con C una constante, todas las cuales forman la familia de antiderivadas $G(x) = F(x) + C$ de la función $f(x)$.

A través de la derivada podemos establecer la familia de primitivas $G(x)$ de funciones elementales $f(x)$.

Teorema 3. Para cada intervalo en donde se satisfaga que $G'(x) = f(x)$, la familia de antiderivadas o primitivas $G(x)$ de la función:

a) $f(x) = 0$ es $G(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = k$ es $G(x) = kx + C$, $k \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^n$ es $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ es $G(x) = \ln |x| + C$, si $x \neq 0$

e) $f(x) = \cos x$ es $G(x) = \sin x + C$

f) $f(x) = \sin x$ es $G(x) = -\cos x + C$

g) $f(x) = \sec^2 x$ es $G(x) = \tan x + C$

h) $f(x) = \sec x \tan x$ es $G(x) = \sec x + C$

i) $f(x) = \csc^2 x$ es $G(x) = -\cot x + C$

j) $f(x) = \csc x \cot x$ es $G(x) = -\csc x + C$

k) $f(x) = e^x$ es $G(x) = e^x + C$

l) $f(x) = b^x$ es $G(x) = \frac{b^x}{\ln b} + C$, si $b > 0$ y $b \neq 1$



Determina la familia de antiderivadas o primitivas G de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x + 4$

d) $f(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}$

e) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x$

h) $f(x) = \sec x \tan x - 3^x$



INTEGRAL INDEFINIDA

Conceptos, ejemplos y ejercicios

La derivada de $y = f(x)$ con respecto de x se representa mediante la siguiente simbología:

$$y', f', D_x, \frac{dx}{dy}$$

Para el caso de la antiderivada, se usa un símbolo especial para representar al conjunto de antiderivadas $F(x) + C$ de la función $f(x)$.

Definición de la integral indefinida de f

El conjunto de antiderivadas $\{F(x) + C\}$ de la función $f(x)$, se denomina integral indefinida de $f(x)$, con respecto a x , y se representa mediante

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

El símbolo $\int$ es un **signo de integral**. La función f es el **integrando** de la integral, y x es la **variable de integración**.

El adjetivo "indefinida" enfatiza que las antiderivadas o primitivas F de una función $y = f(x)$, se diferencian una de otra en un término constante, y debido a este término que se llama constante de integración C , es que la primitiva más general $G(x) = F(x) + C$ de f es una función "genérica".

Ejemplo

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int dx = x + C$, dado que $\frac{d}{dx}(x + C) = 1$

b) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, dado que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$

c) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$, dado que $\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C\right) = \sqrt{x}$

d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, dado que $\frac{d}{dx}(\ln|x| + C) = \frac{1}{x}$

En el ejemplo anterior, para calcular la integral indefinida usamos

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Y para comprobar el resultado, lo que hicimos fue verificar que

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x).$$



Fórmulas básicas de integrales

1. $\int k dx = kx + C, k \in R$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
7. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
8. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
9. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$
11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0 \text{ y } a \neq 1$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$

Fórmulas básicas de derivadas

1. $\frac{d}{dx}(kx) = k, k \in R$
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n, n \neq -1$
3. $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
4. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
9. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
11. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, a > 0 \text{ y } a \neq 1$
12. $\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2 + x^2}$
13. $\frac{d}{dx}\left(\arcsen \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
14. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}}$

La integral indefinida al igual que la derivada, presenta propiedades como extraer la constante fuera del signo de la integral, y la integral de una suma (resta) es la suma (resta) de las integrales. Además, se presenta la propiedad de cuando el integrando es de la forma $f(ax + b)$.



Teorema 4. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un mismo intervalo cerrado, se cumplen en la integral indefinida las siguientes propiedades:

P1) Toda constante k que sea factor del integrando puede ponerse como factor fuera del signo de integración:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

P2) La integral de una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de la integral de cada uno de los sumandos:

$$\int (af(x) \pm bg(x)) dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx$$

P3) Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$, a y b constantes, entonces:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

Usemos las fórmulas y propiedades de integración, para calcular las siguientes integrales.

Ejemplo

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x dx = 7 \int x dx$ **Propiedad 1**
 $= \frac{7x^2}{2} + C$ **Fórmula 2**

b) $\int (x^5 + x - 1) dx = \int x^5 dx + \int x dx - \int 1 dx$ **Propiedad 2**
 $= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - x + C$ **Fórmula 1 y 2**

c) $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$ **Propiedad 3**

d) $\int (5^x + \text{sen}(6x+1)) dx = \int 5^x dx + \int \text{sen}(6x+1) dx$
 $= \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{\cos(6x+1)}{6} + C$

Reescribir el integrando antes de integrar

Antes de integrar, es útil reescribir algunas funciones usando técnicas simples de álgebra para hacer que la integración sea más fácil. Reescribiremos los términos que tienen exponentes en el denominador y los términos que incluyen radicales. Si es posible, realizamos las operaciones indicadas de multiplicación o división de la función dentro de la integral.



Ejemplo

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{1}{x^5} dx &= \int x^{-5} dx && \text{Reescribiendo usando} \\ &&& \text{exponente negativo} \\ &= \frac{x^{-4}}{-4} + C && \text{Integrando} \\ &= -\frac{x^{-4}}{4} + C && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x^2 - 3x}{x} dx &= \int \frac{x^2}{x} dx - \int \frac{3x}{x} dx && \text{Expandiendo} \\ &&& \text{la resta de} \\ &&& \text{integrales} \\ &= \int x dx - \int 3 dx && \text{Dividiendo por } x \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + C && \text{Integrando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \sqrt[4]{x^3} dx &= \int x^{3/4} dx && \text{Reescribiendo usando} \\ &&& \text{exponente fraccionario} \\ &= \frac{x^{7/4}}{\frac{7}{4}} + C && \text{Integrando} \\ &= \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\frac{7}{4}} + C && \text{Cambiando a la} \\ &&& \text{forma radical} \\ &= \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + C && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int (x+1)(x-3) dx &= \int (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= \int x^2 dx - \int 2x dx - \int 3 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x + C \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

Hay funciones que antes de integrarlas, requieren de sustituir en ellas identidades trigonométricas y en otras, primero se debe reescribir la función para poder realizar dicha sustitución, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\text{b) } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx = \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$\text{c) } \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

Pongamos en práctica la integración de funciones usando las fórmulas básicas y las propiedades del Teorema 4.

Calcula las siguientes integrales indefinidas.

$$\text{a) } \int 5 dx$$



b) $\int (3x^6 + 2x^2 + 7x - 1) dx$

c) $\int (x - 4)^2 dx$

d) $\int \frac{t^5 - 2t^4}{t^4} dt$

e) $\int \frac{x^2 + 2x + 7}{x} dx$

f) $\int \frac{r^2 - 5r + 3}{r^3} dr$

g) $\int \frac{2t^3 - t^2 + 2t + 5}{t + 1} dt$

h) $\int e^{-3w} (e^{3w} - e^{-3w}) dx$

i) $\int \sqrt{2x + 1} dx$

j) $\int \sqrt[4]{x} dx$

k) $\int 5\cos(5r) dr$

l) $\int \frac{r}{\sqrt{25r^2 - r^4}} dr$

m) $\int \frac{x - 3}{x^3 + 9x - 3x^2 - 27} dx$

n) $\int (5u - 1)(3u^2 + 2) du$



ñ) $\int (-3 \cos x + 4 \sec^2 x) dx$

o) $\int (2 - 2 \csc t \cot t) dt$

p) $\int \sin (4x - 5) dx$

q) $\int e^{3x-2} dx$



APLICACIONES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Conceptos, ejemplos y ejercicios

En esta sección veremos algunas de las aplicaciones del cálculo integral para resolver ecuaciones que involucran la derivada de una función desconocida, conocido un punto por donde pasa la función desconocida. La aplicación de este tipo de ecuaciones se da en un contexto matemático, en la física, economía y biología, por mencionar algunas áreas de aplicación como veremos a continuación.

Una de las aplicaciones de la integral, es determinar una solución particular de la ecuación

$$y = \int f'(x) dx = F(x) + C,$$

dada $y' = f'(x)$ y un punto $P(x_0, y_0)$ en la curva de la función $y = f(x) = F(x) + C$.

A $P(x_0, y_0)$ se le conoce como valor inicial o condición inicial.

Para determinar la solución particular, primero se determina la solución general para la integral. Luego, se determina la solución particular usando los valores dados x_0 e y_0 para calcular C , como veremos a continuación.

Ejemplo

Determina una función $y = f(x)$ cuya derivada sea $f'(x) = 3x^2 - 2$ y que $f(0) = 2$.

Resolución:

Paso 1. Determina la solución general

Escribe la función como una integral

$$y = \int (3x^2 - 2) dx$$

Expande la integral

$$y = \int 3x^2 dx - \int 2 dx$$

Integra

$$y = \frac{3x^3}{3} - 2x + C$$

Simplifica

$$y = x^3 - 2x + C$$

Paso 2. Determina C

Sustituye el punto $(0, 2)$ por x e y

$$2 = 0^3 - 2(0) + C$$

Despeja C

$$2 = C$$

Paso 3. Escribe la solución particular

$$y = x^3 - 2x + 2$$

A continuación, veamos aplicaciones de la integral en el área de la Física, en las que se describe el movimiento de un cuerpo en línea recta, a través de las funciones: posición $x(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$.



Aplicación a la Física

Velocidad y posición

La velocidad $v(t)$ es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación posición $x(t)$ de un objeto, es decir: $v(t) = x'(t)$.

La integral de la ecuación de velocidad $v(t)$ con respecto al tiempo de un objeto es su posición $x(t)$: $x(t) = \int v(t)dt$.



Ejemplo 1.15

Una partícula se mueve a lo largo del eje x , de modo que su velocidad en cualquier momento $t \geq 0$ está dada por $v(t) = \cos t$. En $t = \pi$, la posición de la partícula es $x(\pi) = 1$. Determina la ecuación para la posición $x(t)$ en algún tiempo t .

Resolución:

Paso 1. Determina la posición a partir de la velocidad

Integra

Paso 2. Determina C

Evalúa la ecuación para $t = \pi$

Dado $x(\pi) = 1$

Despeja C

La posición en cualquier tiempo t esta dada por

$$x(t) = \int v(t)dt = \int \cos t dt$$

$$x(t) = \sin t + C$$

$$x(\pi) = \sin \pi + C$$

$$1 = 0 + C$$

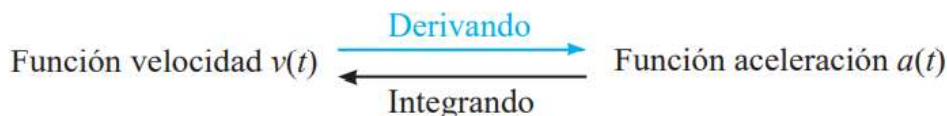
$$C = 1$$

$$x(t) = \sin t + 1$$

Aceleración y velocidad

La aceleración $a(t)$ es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación velocidad $v(t)$ de un objeto, es decir: $a(t) = v'(t)$.

La integral de la ecuación de aceleración $a(t)$ con respecto al tiempo de un objeto es su velocidad $v(t)$: $v(t) = \int a(t)dt$.





Ejemplo

La aceleración de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es $a(t) = 3 + \sin t$. Determina $v(t)$ si $v(0) = -4$.

Resolución:

Paso 1. Determina la velocidad a partir de la aceleración $v(t) = \int a(t) dt = \int (3 + \sin t) dt$

Integra

$$v(t) = 3t - \cos t + C$$

Paso 2. Determina C

Evalúa la ecuación para $t = 0$

$$v(0) = 3(0) - \cos(0) + C$$

Dado $v(0) = -4$

$$-4 = 0 - 1 + C$$

Despeja C

$$C = -3$$

La velocidad en cualquier tiempo t esta dada por

$$v(t) = 3t - \cos t - 3$$

Aplicación a la economía

Costo total y costo marginal

El costo total para producir, vender y distribuir un artículo se denota por $C_T(x) = C_f + C_v(x)$. Los costos variables $C_v(x)$ dependen del número de unidades x , mientras que los costos fijos C_f no, estos permanecen constantes, como $C_T(0) = C_f$.

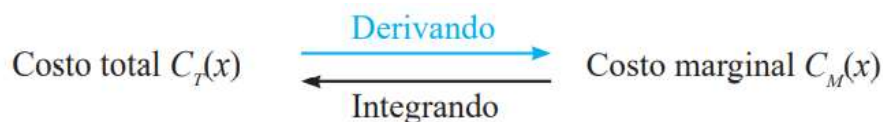
El costo marginal $C_M(x)$ es el costo para producir una unidad adicional más cuando ya se tiene un nivel de producción determinado.

El costo marginal $C_M(x)$ es la derivada del costo total $C_T(x)$ respecto al número de unidades:

$$C_M(x) = \frac{dC_T(x)}{dx}.$$

El costo total $C_T(x)$ es la integral del costo marginal $C_M(x)$ respecto al número de unidades:

$$C_T(x) = \int C_M(x) dx.$$





Ejemplo

Para una empresa, el costo marginal de producir la x -ésima caja de focos es $C_M(x) = 150 - \frac{x}{10\,000}$ pesos. Si los costos fijos son \$400,000.00, determina la función de costo total $C_T(x)$.

Resolución:

Paso 1. Determina $C_T(x)$ a partir de $C_M(x)$

Integra

Paso 2. Determina C

Evalúa la función para $x = 0$

Dado $C_T(x) = 400\,000$

Despeja C

La función de costo total esta dada por

$$C_T(x) = \int \left(150 - \frac{x}{10\,000} \right) dx$$

$$C_T(x) = 150x - \frac{x^2}{20\,000} + C$$

$$C_T(0) = 150(0) - \frac{0^2}{20\,000} + C$$

$$400\,000 = 0 - 0 + C$$

$$C = 400\,000$$

$$C_T(x) = 150x - \frac{x^2}{20\,000} + 400\,000$$

Aplicación a la biología

En el área forestal existen modelos para relacionar el crecimiento de un árbol con su producción de madera o frutos, de igual manera, en la agricultura, se puede relacionar el crecimiento de una planta, por ejemplo, el jitomate con su producción, así como en la extinción o crecimiento de la población. Si bien algunos de estos modelos son complejos, nos enfocaremos en problemas menos complicados que sí podemos resolver con los recursos que tenemos a nuestra disposición.

Ejemplo

Un vivero de plantas vende cierto arbusto después de 4 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 4 años es, aproximadamente $\frac{dh}{dt} = 1.7t + 5$, donde t es el



tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 15 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$). Determina la altura después de t años.

Resolución:

Paso 1. Determina $h(t)$ a partir de $\frac{dh}{dt}$

Integra

$$h = \int (1.7t + 5) dt$$

$$h(t) = \frac{1.7t^2}{2} + 5t + C$$

Paso 2. Determina C

Evalúa la función para $t = 0$

Dado $h(0) = 15$

Despeja C

$$h(0) = \frac{1.7(0)^2}{2} + 5(0) + C$$

$$15 = 0 + 0 + C$$

$$C = 15$$

La altura del árbol en centímetros, esta dada por

$$h(t) = \frac{1.7t^2}{2} + 5t + 15$$

Ejercicios

- Determina la función $y = f(x)$ tal que $y' = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ y $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.
- La razón del aumento de la propagación de una gripe en el número de habitantes en t meses es $P'(t) = \sqrt{10^{3t}}$. Si la población con gripe actual es de 2 600, determina la función de propagación en t meses.
Sugerencia: $\sqrt{10^{3t}} = 10^{3t/2} = (10^{3/2})^t$
- En el momento que el semáforo se pone en verde, un automóvil inicia la marcha con aceleración constante de 2 m/s^2 . En ese mismo momento un camión que lleva velocidad constante de 20 m/s lo rebasa.
 - ¿A qué distancia alcanzará más adelante el automóvil al camión?
 - ¿A qué velocidad va el automóvil en ese instante?
- Si el consumo marginal es una función del ingreso dado por $C'(x) = 0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{x}}$. Si el consumo autónomo $C(x)$ es 45 cuando el ingreso es cero, halla la función de consumo $C(x)$.



Unidad II. Métodos y técnicas de integración



MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN



Propósito de la Unidad

- Demuestra y aplica fórmulas básicas de integración de funciones algebraicas y trascendentes y calcula integrales indefinidas mediante fórmulas, así como mediante diversos métodos y técnicas de integración.



Núcleos Básicos

- 2.1. Cálculo de integrales a partir de propiedades de la integración
- 2.2. Métodos de integración
- 2.3. Otras aplicaciones de la integral indefinida



MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.

El propósito principal del método de sustitución o cambio de variable es sustituir el cálculo de una integral indefinida relativamente compleja por el cálculo de una más sencilla. Para ello, vamos a esbozar los pasos generales a aplicar en este método.

Este método se aplica cuando el integrando podemos identificarlo como la combinación (ya sea producto, cociente o potencia) de una función intermedia “ u ” y su diferencial “ du ”.

FUNCIONES ALGEBRAICAS:

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x(x^2 - 1)dx$

Se puede observar que el integrando está formado por el producto $(x^2 - 1)2xdx$, donde el factor $2xdx$ es el diferencial de $(x^2 - 1)$. En este caso, se puede desarrollar la integración de la siguiente manera:

1) Hacer un cambio de variable $u = (x^2 - 1)$

2) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x, \quad du = 2xdx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{2x}$$

3) Sustituir $u = (x^2 - 1)$ y $dx = \frac{du}{2x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int 2x(x^2 - 1)dx = \int 2xu \frac{du}{2x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = (x^2 - 1)$:

$$\int 2x(x^2 - 1)dx = \frac{(x^2 - 1)^2}{2} + c$$

Ejemplo 2. Calcular $\int 5x^2 \sqrt[4]{x^3 - 2}dx$

Se observa que el integrando contiene en su parte variable, un factor $5x^2dx$ que tiene relación con el diferencial de $(x^3 - 2)$. Esto permite desarrollar la integración de la siguiente manera:

1) Hacer un cambio de variable $u = x^3 - 2$

2) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 2) = 3x^2, \quad du = 3x^2dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{3x^2}$$

3) Sustituir $u = x^3 - 2$ y $dx = \frac{du}{3x^2}$ e integrar con fórmulas.

$$\int 5x^2 \sqrt[4]{u} \frac{du}{3x^2} = \frac{5}{3} \int \sqrt[4]{u} du = \frac{5}{3} \int u^{1/4} du = \frac{5}{3} \frac{u^{5/4}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{5}{3} \frac{4u^{5/4}}{5} + c = \frac{4}{3} \sqrt[4]{u^5} + c$$



4) Regresar el cambio de variable $u = (x^3 - 2)$:

$$\int 5x^2 \sqrt[4]{x^3 - 2} dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{(x^3 - 2)^5} + c$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{3x^2}{5x^3 + 4} dx =$

Se observa que el integrando contiene en su parte variable, un factor $3x^2 dx$ que tiene relación con el diferencial de $(5x^3 + 4)$. Es de la forma $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

1) Hacer un cambio de variable $u = 5x^3 + 4$

2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3 + 4) = 15x^2, \quad du = 15x^2 dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{15x^2}$$

3) Sustituir $u = 5x^3 + 4$ y $dx = \frac{du}{15x^2}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \frac{3x^2}{5x^3 + 4} dx = \int \frac{3x^2}{u} \frac{du}{15x^2} = \int \frac{du}{5u} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \ln|u| + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = 5x^3 + 4$:

$$\int \frac{3x^2}{5x^3 + 4} dx = \frac{1}{5} \ln|5x^3 + 4| + c$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Para calcular integrales de Funciones trigonométricas, es pertinente que los alumnos tengan conocimientos de Trigonometría, igualdades trigonométricas y que recuerden las derivadas de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 4. Calcular $\int \sec^2(4x - 3) dx$

El argumento de la secante cuadrada es un polinomio de primer grado y el factor dx tiene relación con el diferencial de $4x - 3$. Es de la forma $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

Se puede desarrollar la integración de la siguiente manera:

1) Hacer un cambio de variable $u = 4x - 3$

2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(4x - 3) = 4, \quad du = 4dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{4}$$

3) Sustituir $u = 4x - 3$ y $dx = \frac{du}{4}$ e integrar con fórmulas.



$$\int \sec^2(4x-3)dx = \int \sec^2 u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \sec^2 u du = \frac{1}{4} \tan u + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = (4x - 3)$:

$$\int \sec^2(4x-3)dx = \frac{1}{4} \tan(4x-3) + c$$

PRODUCTOS DE POTENCIAS DE SENO Y COSENO:

a) Si los exponentes ambos son pares, aplicarán las igualdades:

$$\sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad \text{ó} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

b) Si uno o los dos exponentes son impares, aplicarán las igualdades:

$$\sen^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{ó} \quad \cos^2 x = 1 - \sen^2 x$$

Ejemplo 5. Calcular $\int \cos^4 x dx$

Es una potencia par. Se aplicará la identidad trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

Sustituimos en la integral y desarrollamos:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \right) dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \int \frac{3}{8} dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{8} \cos 4x dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sen 2x \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sen 4x \right) + c \\ \int \cos^4 x dx &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sen 2x + \frac{1}{32} \sen 4x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Calcular $\int \sen^2 x \cos^3 x dx$

Es una potencia impar. Se aplicarán las identidades trigonométricas

$$\sen^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{ó} \quad \cos^2 x = 1 - \sen^2 x$$

El integrando contiene $\cos x$ con exponente impar y este factor tiene relación con el diferencial de $\sen x$, por eso se debe reservar el factor $\cos x dx$ y aplicar la identidad trigonométrica que

permita convertir el resto de cosenos en senos. Es de la forma $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$$\begin{aligned} \int \sen^2 x \cos^3 x dx &= \int \sen^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sen^2 x (1 - \sen^2 x) \cos x dx \\ &= \int \sen^2 x \cos x dx - \int \sen^4 x \cos x dx \end{aligned}$$

1) Hacer un cambio de variable $u = \sen x$



- 2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \text{sen} x = \cos x, \quad du = \cos x \, dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{\cos x}$$

- 3) Sustituir $u = \text{sen} x$ y $dx = \frac{du}{\cos x}$ e integrar con fórmulas.

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx - \int \text{sen}^4 x \cos x \, dx = \int u^2 \cos x \frac{du}{\cos x} - \int u^4 \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^2 \, du - \int u^4 \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c \end{aligned}$$

- 4) Regresar el cambio de variable $u = \text{sen} x$:

$$\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} - \frac{\text{sen}^5 x}{5} + c$$

POTENCIAS DE TANGENTE Y SECANTE:

Se aplicarán las igualdades trigonométricas: $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ ó $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Se aplicarán las fórmulas:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad \text{y} \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c; \quad \frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x \quad \text{y} \quad \int \tan x \sec x \, dx = \sec x + c$$

Ejemplo 7. Calcular $\int \tan^4 x \, dx$

Es una potencia par de tangente. Se separa un factor de tangente cuadrático y con la igualdad trigonométrica se convierte en secante cuadrada.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \sec^2 x \, dx + \int dx \end{aligned}$$

El integrando contiene factor $\sec^2 x \, dx$ que tiene relación con el diferencial de $\tan x$. Es de la

forma $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

- 1) Hacer un cambio de variable $u = \tan x$

- 2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x, \quad du = \sec^2 x \, dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

- 3) Sustituir $u = \tan x$ y $dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \tan^4 x \, dx = \int u^2 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} - \int \sec^2 x \, dx + \int dx = \int u^2 \, du - \int \sec^2 x \, dx + \int dx = \frac{1}{3} u^3 + \tan x - x + c$$

- 4) Regresar el cambio de variable $u = \tan x$:

$$\int \tan^4 x \, dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + c$$



Ejemplo 8. Calcular $\int \tan^3 x \sec x dx$

Es una potencia impar de tangente y secante. Se separa un factor de cada tipo y con la igualdad trigonométrica se convierte el resto de las tangentes cuadradas en secantes cuadradas.

$$\int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \tan x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x dx = \int \sec^2 x \tan x \sec x dx - \int \tan x \sec x dx$$

El integrando contiene el factor $\tan x \sec x dx$ que tiene relación con el diferencial de $\sec^2 x$.

Es de la forma $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

1) Hacer un cambio de variable $u = \sec x$

2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x, \quad du = \tan x \sec x dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$$

3) Sustituir $u = \sec x$ y $dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \tan^3 x \sec x dx = \int u^2 \tan x \sec x \frac{du}{\tan x \sec x} - \int \tan x \sec x dx = \int u^2 du - \int \tan x \sec x dx = \frac{1}{3} u^3 - \sec x + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = \sec x$:

$$\int \tan^3 x \sec x dx = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + c$$

FUNCIONES EXPONENCIALES:

Las funciones exponenciales se caracterizan por tener la parte variable en el exponente.

Ejemplo 9. Calcular $\int 6e^{(3x+2)} dx$

Es una función exponencial de base “e”. El exponente es un polinomio de primer grado y el factor $6dx$ tiene relación con el diferencial de $3x + 2$. Es de la forma $\int e^u du = e^u + c$

1) Hacer un cambio de variable $u = 3x + 2$

2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (3x + 2) = 3, \quad du = 3dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{3}$$

3) Sustituir $u = 3x + 2$ y $dx = \frac{du}{3}$ e integrar con fórmulas.

$$\int 6e^{(3x+2)} dx = \int 6e^u \frac{du}{3} = \int 2e^u du = 2e^u + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = \sec x$:



$$\int 6e^{(3x+2)} dx = 2e^{(3x+2)} + c$$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

Las funciones logarítmicas se caracterizan por la forma $f(x) = \log_a x$, donde “a” es la base y debe ser positiva y diferente de cero.

Cuando el logaritmo tiene de base el número de Euler ($e \approx 2.7182$) se llama Logaritmo Natural ($f(x) = \ln x$) y al resto se les llama Logaritmos aritméticos.

El Método de integración por sustitución o cambio de variable no es adecuado para las funciones logarítmicas puras y en algunos casos es aplicable cuando se combinan con factores algebraicos, que se incluyen en el siguiente contenido.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:

ACTIVIDAD 1. Dadas las siguientes integrales, escribe cuál es la expresión que debe sustituirse como cambio de variable, en el proceso de integración de cada caso:

a) $\int 2e^{(5x)} dx$; $u =$ _____ b) $\int \frac{4x}{(x^2 - 1)^5} dx$; $u =$ _____

c) $\int \cos(\pi x - 1) dx$; $u =$ _____ d) $\int \frac{5x^4}{3x^5 - 5} dx$; $u =$ _____

e) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; $u =$ _____ f) $\int \tan x \sec^2 x dx$; $u =$ _____

g) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$; $u =$ _____ h) $\int \sin x \cos^2 x dx$; $u =$ _____

ACTIVIDAD 2. Calcula por el método de sustitución o cambio de variable, las siguientes integrales:

a) $\int 10x^3 \sqrt{5x^2 + 4} dx =$

b) $\int 6x^2 (4x^3 + 3) =$

c) $\int \frac{4x}{(x^2 + 5)^3} dx =$

d) $\int \frac{3x^2}{2x^3 + 5} dx =$

e) $\int \cos^3 x dx =$



$$f) \int \tan^3 x dx =$$

$$g) \int \tan^3 x \sec^3 x dx =$$

$$h) \int \sin x \cos^3 x dx =$$

$$i) \int 4 \sec^2(2x - 1) dx =$$

$$j) \int 4e^{2x-1} dx =$$



Método de integración por sustitución o cambio de variable (continuación).

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x \operatorname{sen}(x^2 - 1) dx$

Se puede observar que el integrando está formado por el producto $\operatorname{sen}(x^2 - 1)2x dx$, donde el factor $2x dx$ es el diferencial del argumento del seno $(x^2 - 1)$. Es de la forma $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$

5) Hacer un cambio de variable $u = (x^2 - 1)$

6) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x, \quad du = 2x dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{2x}$$

7) Sustituir $u = (x^2 - 1)$ y $dx = \frac{du}{2x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int 2x \operatorname{sen}(x^2 - 1) dx = \int \cancel{2x} \operatorname{sen} u \frac{du}{\cancel{2x}} = \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$$

8) Regresar el cambio de variable $u = (x^2 - 1)$:

$$\int 2x \operatorname{sen}(x^2 - 1) dx = -\cos(x^2 - 1) + c$$

Ejemplo 2. Calcular $\int 6x^2 e^{x^3 - 1} dx$

Se observa que el integrando contiene un factor $6x^2 dx$ que tiene relación con el diferencial del exponente $(x^3 - 1)$. Es de la forma $\int e^u du = e^u + c$:

5) Hacer un cambio de variable $u = x^3 - 1$

6) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1) = 3x^2, \quad du = 3x^2 dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{3x^2}$$

7) Sustituir $u = x^3 - 1$ y $dx = \frac{du}{3x^2}$ e integrar con fórmulas.

$$\int 6x^2 e^{x^3 - 1} dx = \int \cancel{6} \cancel{x^2} e^u \frac{du}{\cancel{3x^2}} = 2 \int e^u du = 2e^u + c$$

8) Regresar el cambio de variable $u = (x^3 - 1)$:

$$\int 6x^2 e^{x^3 - 1} dx = 2e^{x^3 - 1} + c$$



Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

Se observa que el integrando contiene en su parte variable, un factor $\frac{1}{x} dx$ que tiene relación

con el diferencial de $\ln x$. Es de la forma $\int u^n du = \frac{nu^{n+1}}{n+1} + c$

1) Hacer un cambio de variable $u = \ln x$

2) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, du = \frac{1}{x} dx \text{ y } dx = x du$$

3) Sustituir $u = \ln x$ y $dx = x du$, en la Integral y desarrollar:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{u^2}{\cancel{x}} \color{red}{x} du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u = \ln x$:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + c$$

Ejemplo 4. Calcular $\int \frac{e^{\sin 5x}}{\sec 5x} dx$

Esta integral tiene la particularidad de que el seno y la secante no tienen relación a través de sus derivadas, por eso debe buscarse una identidad trigonométrica que permita encontrar una relación.

Se puede aplicar la identidad $\cos 5x = \frac{1}{\sec 5x}$ en la integral y transformarla:

$$\int \frac{e^{\sin 5x}}{\sec 5x} dx = \int e^{\sin 5x} \left(\frac{1}{\sec 5x} \right) dx = \int e^{\sin 5x} \cos 5x dx$$

Ahora si podemos observar que el factor $\cos 5x dx$ tiene relación con el diferencial del exponente de “ e ” ($\sin 5x$). Es de la forma $\int e^u du = e^u + c$

5) Hacer un cambio de variable $u = \sin 5x$

6) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \sin 5x = 5 \cos 5x, du = 5 \cos 5x dx, \text{ entonces } dx = \frac{du}{5 \cos 5x}$$

7) Sustituir $u = \sin 5x$ y $dx = \frac{du}{5 \cos 5x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \frac{e^{\sin 5x}}{\sec 5x} dx = \int e^{\sin 5x} \cos 5x dx = \int e^u \color{red}{\cos 5x} \frac{du}{5 \color{red}{\cos 5x}} = \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + c$$

8) Regresar el cambio de variable $u = \sin 5x$:



$$\int \frac{e^{\sin 5x}}{\sec 5x} dx = \frac{1}{5} e^{\sin 5x} + c$$

Ejemplo 5. Calcular $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Esta integral tiene la particularidad de que el diferencial no corresponde con el denominador, por eso debe buscarse una técnica matemática que permita encontrar una relación entre ellos.

Sumar y restar simultáneamente en el numerador de la función, el término e^x .

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Ahora si podemos observar que el factor $e^x dx$ tiene relación con el diferencial del denominador $(1+e^x)$. Es de la forma $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$

- 1) Hacer un cambio de variable $u = 1 + e^x$
- 2) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1+e^x) = e^x, \quad du = e^x dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{e^x}$$

- 3) Sustituir $u = 1 + e^x$ y $dx = \frac{du}{e^x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \int \frac{e^x}{u} \frac{du}{e^x} = x - \int \frac{du}{u} = x - \ln u + c$$

- 4) Regresar el cambio de variable $u = 1 + e^x$:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + c$$

Ejemplo 6. Calcular $\int \frac{6x}{4x^4+9} dx$

No se observa relación entre el factor $6x dx$ con el diferencial del denominador $(4x^4+9)$, pero si se puede relacionar con la derivada de la raíz cuadrada $(2x^2)$. Esta condición permite

usar la fórmula $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c$

- 1) Hacer un cambio de variable $u^2 = 4x^4 \rightarrow u = 2x^2$ y $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
- 2) Derivar “ u ” y determinar “ dx ” con respecto “ du ”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2) = 4x, \quad du = 4x dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{4x}$$

- 3) Sustituir $u^2 = 4x^4 \rightarrow u = 2x^2$ y $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$ y $dx = \frac{du}{4x}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \frac{6x}{4x^4+9} dx = \int \frac{6x}{u^2+a^2} \left(\frac{du}{4x}\right) = \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a}\right) \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c = \frac{3}{2a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c$$



4) Regresar el cambio de variable $u^2 = 4x^4 \rightarrow u = 2x^2$ y $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$:

$$\int \frac{6x}{4x^4 + 9} dx = \frac{3}{2(3)} \arctan\left(\frac{2x^2}{3}\right) + c = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2x^2}{3}\right) + c$$

NOTA: Esta integral también puede calcularse usando el Método de Integración por Sustitución Trigonométrica. La fórmula que aplicamos fue desarrollada por ese método.

Ejemplo 7. Calcular $\int \frac{30x^2}{\sqrt{100 - 4x^6}} dx$

No se observa relación entre el factor $30x^2 dx$ con el diferencial de la expresión $(100 - 4x^6)$, pero si se puede relacionar con la derivada de la raíz cuadrada $(2x^3)$. Esta condición permite

usar la fórmula $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + c$

1) Hacer un cambio de variable $u^2 = 4x^6 \rightarrow u = 2x^3$ y $a^2 = 100 \rightarrow a = 10$

2) Derivar “u” y determinar “dx” con respecto “du”

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2, \quad du = 6x^2 dx, \quad \text{entonces } dx = \frac{du}{6x^2}$$

3) Sustituir $u^2 = 4x^6 \rightarrow u = 2x^3$; $a^2 = 100 \rightarrow a = 10$ y $dx = \frac{du}{6x^2}$ e integrar con fórmulas.

$$\int \frac{30x^2}{\sqrt{100 - 4x^6}} dx = \int \frac{30\cancel{x^2}}{\sqrt{a^2 - u^2}} \left(\frac{du}{6\cancel{x^2}}\right) = 5 \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 5 \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

4) Regresar el cambio de variable $u^2 = 4x^6 \rightarrow u = 2x^3$ y $a^2 = 100 \rightarrow a = 10$:

$$\int \frac{30x^2}{\sqrt{100 - 4x^6}} dx = 5 \arcsen\left(\frac{2x^3}{10}\right) + c = 5 \arcsen\left(\frac{x^3}{5}\right) + c$$

NOTA: Esta integral también puede calcularse usando el Método de Integración por Sustitución Trigonométrica. La fórmula que aplicamos fue desarrollada por ese método.

PRODUCTOS DE LA FORMA $\sen(mx)\cos(nx)$

Se aplican las igualdades:

$$\sen A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sen(A+B) + \sen(A-B)] = \frac{1}{2} \sen(A+B) + \frac{1}{2} \sen(A-B)$$

$$\cos A \cdot \sen B = \frac{1}{2} [\sen(A+B) - \sen(A-B)] = \frac{1}{2} \sen(A+B) - \frac{1}{2} \sen(A-B)$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B)$$

$$\sen A \cdot \sen B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \frac{1}{2} \cos(A-B) - \frac{1}{2} \cos(A+B)$$

$$\sen(-x) = -\sen x \quad \text{y} \quad \cos(-x) = \cos x$$



Ejemplo 8. Calcular $\int \sin 2x \cos 4x dx$

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 4x dx &= \int \left(\frac{1}{2} \sin(6x) + \frac{1}{2} \sin(-2x) \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin(6x) - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{12} (-\cos 6x) - \frac{1}{4} (-\cos 2x) + c \\ \int \sin 2x \cos 4x dx &= -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 2x + c\end{aligned}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:

ACTIVIDAD 1. Dadas las siguientes integrales, escribe cuál es la expresión que debe sustituirse como cambio de variable, en el proceso de integración de cada caso:

a) $\int 30x^2 e^{(5x^3+1)} dx$; $u =$ _____

b) $\int \frac{6x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$; $u =$ _____

c) $\int \frac{6}{\sqrt{9-4x^2}} dx$; $u =$ _____

d) $\int \frac{2x}{x^4+1} dx$; $u =$ _____

e) $\int 30x^2 \cos(x^3-1) dx$; $u =$ _____

f) $\int \frac{x}{\sqrt{9x^4-1}} dx$; $u =$ _____

g) $\int \frac{\ln x^2}{2x} dx$; $u =$ _____

h) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; $u =$ _____

ACTIVIDAD 2. Calcula por el método de sustitución o cambio de variable, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx =$

b) $\int \csc^2 x e^{\cot x} dx =$

c) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx =$

d) $\int \frac{x}{25x^2+4} dx =$



$$e) \int \frac{dx}{25x^2 + 4} =$$

$$f) \int \frac{\ln^3 x}{3x} dx =$$

$$g) \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx =$$

$$h) \int 4x^3 e^{2x^4+1} dx =$$

$$i) \int \sin 3x \cos x dx =$$

$$j) \int \sin 2x \sin 3x dx =$$



INTEGRACIÓN POR PARTES

CONCEPTOS CLAVES

Cuando se trata de integrar por cambio de variable y la variable original no se elimina, se puede usar otro método de integración que es el de integración por partes. Así como el método de cambio de variable se apoyaba en la regla de la cadena para las derivadas, la integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. Sean dos funciones tales que $u = (x)$ y $v = g(x)$, la derivada del producto de estas funciones está dada por

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

En forma diferencial

$$d(uv) = u dv + v du$$

Integrando

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

Finalmente, la fórmula de integración por partes puede escribirse

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para aplicar esta forma de integrar, no existe una regla general para definir quién es u (primer factor) y quién es dv (segundo factor), pero es recomendable que al determinar cuál es la derivada, ésta sea fácilmente integrable. Sin embargo, al momento de integrar son bastante útiles las siguientes recomendaciones generales:

1. Que dx sea siempre una parte de dv .
2. Que dv sea fácilmente integrable
3. Cuando una expresión para integrar es el producto de dos funciones, frecuentemente se elige la expresión de apariencia complicada, con tal que pueda integrarse, como parte de dv .



RECOMENDACION:

1) Escoger u y dv adecuadamente.

Es muy importante seleccionar quien es u y quien es dv , una mala elección puede complicar más el integrando. Recuerda la palabra ILATE que se forma por la primera letra de los diferentes tipos de funciones: Inversa, Logarítmica, Algebraica, Trigonométrica, Exponencial; con ella puedes seleccionar a u y dv . " u " será la función que se encuentre más a la izquierda de dicha palabra.

2) No cambiar la elección.

A veces tenemos que aplicar el método más de una vez.

3) Integral repetitiva.

En ocasiones al aplicar la fórmula de integración por partes resulta la misma integral planteada, es necesario despejar para resolver con mayor rapidez.

Ejemplos

Ejemplo 1: $\int x e^x dx =$

Para resolver la integral tener siempre presente la fórmula de Integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Paso 1: Seleccionar u y dv aplicando ILATE

$$u = x \text{ (función algebraica)} \quad dv = e^x \text{ (función exponencial)} \quad . \quad I L A T E$$

Paso 2: Determinar du recordando que $du = f'(x)dx$ y determinar v integrando dv

$$du = dx$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

Paso 3: Sustituir u , v , du y dv en la fórmula

$$\int x e^x dx = x(e^x) - \int e^x (dx)$$

Paso 4: resolver la nueva integral y simplificar

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int x e^x dx = e^x (x - 1) + C$$

Ejemplo 2: $\int x \cos x dx =$



Para resolver la integral tener siempre presente la Fórmula de Integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Paso 1: Seleccionar u y dv aplicando ILATE

$u = x$ (función algebraica) $dv = \cos x$ (función trigonométrica) I L A T E

Paso 2: Determinar du recordando que $du = f'(x)dx$ y determinar v integrando dv

$$du = dx$$

$$\int dv = \cos x dx$$

$$v = \sin x$$

Paso 3: Sustituir u, v, du y dv en la fórmula

$$\int x \cos x dx = x(\sin x) - \int \sin x(dx)$$

Paso 4: resolver la nueva integral y simplificar

$$\int x \cos x dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Ejercicios: Resuelva con el método de integración por partes las siguientes integrales.

1) $\int x^2 e^x dx$

2) $\int x \sin x dx$

3) $\int \ln x dx$

4) $\int x \ln x dx$

5) $\int e^x (x^2 - 2x - 1) dx$

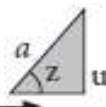
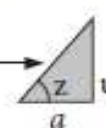
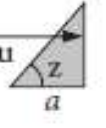
6) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

7) $\int e^x \cos x dx$

Integración por sustitución trigonométrica

CONCEPTOS CLAVES

Este método de integración se aplica cuando en el integrando aparecen expresiones de las formas: $\sqrt{a^2 - u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. En estos casos la manera más corta o efectiva para calcular la integral es hacer un cambio de variable, de la siguiente manera:

CASO	FORMATO EN EL INTEGRANDO	CAMBIO DE VARIABLE	RESULTADO EN EL INTEGRANDO DESPUÉS DEL CAMBIO DE VARIABLE
1	$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \sin z$ 	$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin z)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} \\ &= \sqrt{a^2 - (1 - \cos^2 z)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 z} \\ &= a \cos z\end{aligned}$
2	$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a \tan z$ 	$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + (a \tan z)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 z} \\ &= \sqrt{a^2 (1 + \tan^2 z)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 z} \\ &= a \sec z\end{aligned}$
3	$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \sec z$ 	$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{(a \sec z)^2 - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\sec^2 z - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \tan^2 z} \\ &= a \tan z\end{aligned}$

Ejemplo 1:

$$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx =$$

Paso 1: Ubicar el triángulo a usar y realizar los cambios de variable para ***a*** y ***u***. La expresión dada es de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ por lo que corresponde al **caso 1**.





z

$$a = 4 \quad x = u \quad \text{sen } z = \frac{u}{4}, \text{ despejando } u, \quad u = 4 \text{ sen } z$$

$$dx = du = 4 \cos z \, dz$$

Paso 2: Sustituir en la integral dada y simplificar

$$\int \frac{\sqrt{4^2 - (4 \text{ sen } z)^2}}{4 \text{ sen } z} 4 \cos z \, dz$$

Factorizando con factor común

$$\int \frac{\sqrt{4^2(1 - \text{sen}^2 z)}}{4 \text{ sen } z} 4 \cos z \, dz$$

Sabemos que $1 - \text{sen}^2 z = \cos^2 z$

$$\int \frac{\sqrt{4^2 \cos^2 z}}{\text{sen } z} \cos z \, dz$$

Extrayendo raíz cuadrada

$$\int \frac{4 \cos z}{\text{sen } z} \cos z \, dz$$

Multiplicando

$$\int \frac{4 \cos^2 z}{\text{sen } z} \, dz$$

Sabemos que $\cos^2 z = 1 - \text{sen}^2 z$

$$\int \frac{4(1 - \text{sen}^2 z)}{\text{sen } z} \, dz$$

Separando las fracciones

$$4 \int \left(\frac{1}{\text{sen } z} - \text{sen } z \right) \, dz$$

Sabemos que $\frac{1}{\text{sen } z} = \csc z$

$$4 \int (\csc z - \text{sen } z) \, dz$$

Paso 3: Se separan las integrales y se resuelven

$$4 \int (\csc z - \text{sen } z) \, dz = 4 \ln(\csc z - \cot z) + 4 \cos z + C$$

Paso 4: Realizar los cambios de variables para regresar a las originales

Recordamos que $\frac{x}{4} = \text{sen } z$ y recordando $\text{sen } z = \frac{co}{h}$; tenemos $co = x$ y $h = 4$. Se encuentra el cateto faltante aplicando el teorema de Pitágoras



$$cA = \sqrt{16 - x^2}$$

Encontrando las razones trigonométricas del resultado queda,

$$\csc z = \frac{h}{co} = \frac{4}{x}$$

$$\cot z = \frac{cA}{co} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$$

$$\cos z = \frac{cA}{h} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$$

Sustituyendo en el resultado

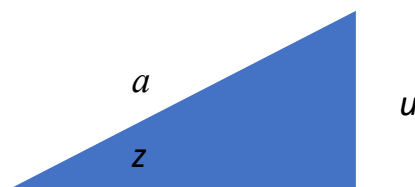
$$\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx = 4 \ln \left| \frac{4}{x} - \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} \right| + 4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx = 4 \ln \left| \frac{4}{x} - \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} \right| + \sqrt{16 - x^2} + C$$

EJEMPLO 2:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 25}} dx$$

Paso1: Ubicar el triángulo a usar y realizar los cambios de variable para ***a*** y ***u***. La expresión dada es de la forma $\sqrt{a^2 + u^2}$ por lo que corresponde al **caso 2**.



$$a = 5 \quad x = 5 \tan z$$

$$dx = 5 \sec^2 z \, dz$$

Paso 2: Sustituir en la integral dada y simplificar

$$\int \frac{1}{(5 \tan z)^2 \sqrt{(5 \tan z)^2 + 25}} 5 \sec^2 z \, dz$$

Multiplicando y extrayendo factor común

$$\int \frac{5 \sec^2 z \, dz}{25 \tan^2 z \sqrt{25(1 + \tan^2 z)}}$$

Se le extrae raíz al 25 y se simplifica

$$\int \frac{\sec^2 z \, dz}{25 \tan^2 z \sqrt{1 + \tan^2 z}}$$

Sabemos que $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$



$$\int \frac{\sec^2 z dz}{25 \tan^2 z \sqrt{\sec^2 z}}$$

Extrayendo raíz y simplificando

$$\frac{1}{25} \int \frac{\sec z dz}{\tan^2 z}$$

Recordando $\tan^2 z = \frac{\sec^2 z}{\cos^2 z}$ y $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ y sustituyendo queda

$$\frac{1}{25} \int \frac{\cos^2 z dz}{\cos z \sec^2 z}$$

Simplificando

$$\frac{1}{25} \int \frac{\cos z dz}{\sec^2 z}$$

Resolviendo por cambio de variable, se sustituyendo $u = \sec z$ y $du = \sec z dz$

$$\frac{1}{25} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{25} \int u^{-2} du$$

Paso 3: Se resuelve la integral

$$\frac{1}{25} \int u^{-2} du = \frac{1}{25} \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{-25u} + C$$

Paso 4: Realizar los cambios de variables para regresar a las originales

Conocemos que $u = \sec z$

$$\frac{1}{25} \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{25 \sec z} + C =$$

Sabemos $\frac{1}{\sec z} = \cos z$

$$\frac{1}{25} \int \frac{du}{u^2} = \frac{-\cos z}{25} + C$$

Aplicándolo al triángulo rectángulo que $\frac{x}{5} = \tan z$ y recordando $\tan z = \frac{co}{ca}$; tenemos $co = x$ y $ca = 5$ y se encuentra la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{x^2 + 25}$$

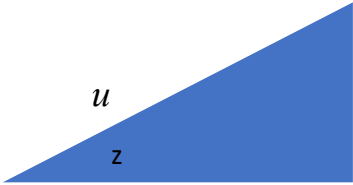
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 25}} dx = \frac{-\cos z}{25} + C = \frac{-\sqrt{x^2 + 25}}{25x}$$



EJEMPLO 3:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 7}} dx$$

Paso 1: Ubicar el triángulo a usar y realizar los cambios de variable para **a** y **u** . La expresión dada es de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ por lo que corresponde al **caso 3**.


$$a = \sqrt{7} \qquad x = \sqrt{7} \sec z$$
$$dx = \sqrt{7} \sec z \tan z dz$$

Paso 2: Sustituir en la integral dada y simplificar

$$\int \frac{\sqrt{7} \sec z \tan z}{(\sqrt{7} \sec z)^2 \sqrt{(\sqrt{7} \sec z)^2 - 7}}$$

Elevando al cuadrado y extrayendo factor común,

$$\int \frac{\sqrt{7} \sec z \tan z dz}{7 \sec^2 z \sqrt{7(\sec^2 z - 1)}}$$

Se le extrae el 7 de la raíz y se simplifica

$$\int \frac{\tan z dz}{7 \sec z \sqrt{\sec^2 z - 1}}$$

Sabemos que $\tan^2 z = \sec^2 z - 1$

$$\int \frac{\tan z dz}{7 \sec z \sqrt{\tan^2 z}}$$

Extrayendo raíz y simplificando

$$\frac{1}{7} \int \frac{dz}{\sec z}$$

Recordando $\cos z = \frac{1}{\sec z}$ y sustituyendo queda

$$\frac{1}{7} \int \cos z dz$$

Paso 3: Se resuelve la integral

$$\frac{1}{7} \int \cos z dz = \frac{1}{7} \sin z + C$$

Paso 4: Realizar los cambios de variables para regresar a las originales



Conocemos que $x = \sqrt{7} \sec z$

Aplicándolo al triángulo rectángulo y que $\sec z = \frac{x}{\sqrt{7}}$ y recordando $\sec z = \frac{h}{ca}$; tenemos $h = x$ y $ca = \sqrt{7}$ y se encuentra el co aplicando el teorema de Pitágoras

$$co = \sqrt{x^2 - 7}$$

Por lo que

$$\sen z = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x}$$

La solución a nuestra integral, es

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 7}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{7x}$$

Ejercicios: Resuelva con el método de integración de sustitución trigonométricas las siguientes integrales.

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

2) $\int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$

3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{64+x^2}} dx$

4) $\int \frac{6dx}{\sqrt{x^2-9}}$

5) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} dx$

6) $\int \sqrt{7 + 49x^2} dx$



INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES (CASO 1 Y 2)

Conceptos, ejemplos y ejercicios

En la sección anterior vimos ejemplos de integrales indefinidas en las que el integrando es una función racional y las resolvimos completando o transformando expresiones para poder aplicar el método de la sustitución trigonométrica.

Cuando se trata de calcular primitivas en las que el integrando es una fracción constituida por polinomios y en las que el denominador se puede factorizar, entonces la integral indefinida se puede calcular si el integrando lo expresamos como una suma de fracciones simples, a las que denominaremos **fracciones parciales**.

Para hacer estas transformaciones y calcular la integral dada, es necesario tener preparación en las técnicas de factorización, resolución de sistemas de ecuaciones de 2 o 3 incógnitas y propiedades de los logaritmos, todo lo cual has estudiado en los cursos de precálculo, así como dominar las principales integrales inmediatas que ya se han visto en este curso.

Se diferencian en este procedimiento cuatro casos posibles.

Caso 1. El denominador es el producto de factores de la forma $(ax + b)$ todos distintos

Para tener una idea sobre este método vamos a partir, como ejemplo, de la diferencia de dos fracciones y sumarlas algebraicamente.

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3(x+1) - 2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+7}{x^2-x-2}$$

Ahora supongamos que lo que se busca es la integral de $f(x) = \frac{x+7}{x^2-x-2}$

Los métodos estudiados hasta el momento no nos permiten obtener un resultado, pero si conocemos la descomposición de esta función en las dos fracciones, aplicando propiedades de la integración y utilizando resultados de integrales inmediatas, sí es posible calcularla:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx \\ = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int \frac{3}{x-2} dx - \int \frac{2}{x+1} dx = 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Es decir, para calcular integrales de este tipo, se requiere poder transformar el integrando en fracciones simples, método que llamaremos **descomposición en fracciones parciales**.

Ejemplo

Resolver la siguiente integral indefinida $\int \frac{dx}{x^2-9}$

Resolución

De la expresión del integrando, se descompone la función polinomial del denominador



$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x + 3)(x - 3)}$$
$$\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 3)}$$

Esta descomposición en fracciones parciales genera dos cocientes, en donde hay que determinar A y B , ya que el grado del polinomio es dos. Se procede al hallazgo de esos coeficientes.

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{x - 3}$$
$$1 = \frac{A}{(x + 3)} \cdot (x + 3)(x - 3) + \frac{B}{(x - 3)} \cdot (x + 3)(x - 3)$$
$$1 = A(x - 3) + B(x + 3)$$
$$1 = Ax - 3A + Bx + 3B$$
$$1 = (A + B)x + (-3A + 3B)$$

Se tiene un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, por lo que se tiene que resolver

$$A + B = 0$$
$$-3A + 3B = 1$$
$$A = -\frac{1}{6}$$
$$B = \frac{1}{6}$$

Entonces, sustituyendo el valor equivalente de los coeficientes A y B

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 3)} = \frac{-\frac{1}{6}}{(x + 3)} + \frac{\frac{1}{6}}{(x - 3)}$$

Así que, de la integral del problema, su expresión mixta, es

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int \frac{-\frac{1}{6}}{x + 3} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{x - 3} dx = -\frac{1}{6} \ln|x + 3| + \frac{1}{6} \ln|x - 3| + C$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, nos queda

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C$$

Caso 2. En el denominador hay factores de la forma $(ax + b)$ repetidos

En este caso, el factor $(ax + b)$ que se repite n veces, corresponde a la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A_3}{(ax + b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}.$$



Ejemplo. Resolver la siguiente integral $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$

Resolución

De la expresión del integrando, se descompone la función polinomial del denominador

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

Esta descomposición en fracciones parciales generó tres coeficientes, A , B y C , ya que el grado del polinomio del denominador es tres. Se procede al hallazgo de esos coeficientes

$$x^2 = \frac{A}{(x-1)^3} \cdot (x-1)^3 + \frac{B}{(x-1)^2} \cdot (x-1)^3 + \frac{C}{(x-1)} \cdot (x-1)^3$$

$$x^2 = A + B(x-1) + C(x-1)^2$$

$$x^2 = A + B(x-1) + C(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 = A + Bx - B + Cx^2 - 2Cx + C$$

$$x^2 = Cx^2 + (B - 2C)x + (A + B + C)$$

Y se obtiene un sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$C = 1$$

$$B - 2C = 0$$

$$A - B + C = 0$$

Resolviendo este sistema: $C = 1$, $B = 2$ y $A = 1$.

Sustituyendo los valores equivalentes de los coeficientes en cada termino

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)}$$

Regresando a la integral del problema

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)}$$

Integrando

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} - 2(x-1)^{-1} + \ln|x-1| + C$$

Finalmente

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)} + \ln|x-1| + C$$



Ejercicios

1. Calcular por descomposición en fracciones parciales las siguientes integrales.

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 20}$$

$$\int \frac{5x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\int \frac{4x - 5}{x^3 - 3x^2} dx$$

$$\int \frac{5}{(x + 2)(x^2 + 3x + 2)} dx$$



OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Ejemplos resueltos:

1. **Determinar la función $y = f(x)$ tal que $f'(x) = x \operatorname{sen} x$ y $f(\pi/2) = 1/2$.**

Como sabes, esto significa encontrar una primitiva particular dentro de la familia de primitivas que tienen como derivada a $f'(x) = x \operatorname{sen} x$, es decir hay que calcular la integral indefinida $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ y determinar qué valor de la constante C satisface la condición dada.

Ahora ya conoces un método para calcular la integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, pues se puede calcular por partes.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Donde $u(x) = x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, entonces $du = dx$ y $v(x) = -\cos x$.

Y al sustituir en la fórmula de integración por partes queda:

$$F(x) = \int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Para determinar el valor de C , sustituimos x por $\pi/2$ en la expresión general de las primitivas y, se obtiene

$$F(\pi/2) = -\pi/2 \cos \pi/2 + \operatorname{sen} \pi/2 + C = (\pi/2)(0) + 1 + C$$

Como también, por la condición inicial

$$F(\pi/2) = 1/2, \text{ entonces } 1 + C = 1/2,$$

de donde $C = -1/2$.

Y la solución buscada, es $F(\pi/2) = -x \cos x + \operatorname{sen} x - 1/2$

2. **Si se parte de un cultivo con 1,000 bacterias con crecimiento exponencial $y(t) = Ae^{kt}$ y al cabo de 10 horas se calcula la cifra de bacterias en 5,000, determina:**
- El número de bacterias en cualquier tiempo t**
 - El número de bacterias al cabo de un día.**

Si partimos de la expresión $y(t) = Ae^{kt}$ (fórmula obtenida a partir de la integral de $f'(t) = kf(t)$), se tiene que para el valor inicial de $t = 0$ en que se comienza a medir el crecimiento, como $y(0) = Ae^0 \therefore y(0) = A$, entonces, $A(0) = 1,000$. Si a las 10 horas hay 5,000, entonces $5000 = 1000e^{10k}$, luego $e^{10k} = 5$ y aplicando las propiedades de los logaritmos para despejar k :

$$\ln e^{10k} = \ln 5$$



$$10k \ln e = \ln 5$$

$$10k = \ln 5$$

$$10k = 1.6$$

$$k = 0.16$$

a) Para este cultivo, el número de bacterias en cualquier tiempo t , medido en horas, es

$$y(t) = 1000e^{0.16t}$$

b) Al cabo de un día el número de bacterias es

$$y(24) = 1000e^{0.16(24)}$$

$$y(24) \approx 1000(46.525)$$

$$y(24) \approx 46\,525$$

3. Si se parte de una cantidad de 50 mg de Radio puro, determinar

a) La fórmula para el Radio que queda al cabo de un tiempo t .

b) Calcular el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de Radio sea de 20 mg.

Respuesta a): El objetivo es obtener la fórmula para conocer el decrecimiento del Radio.

La fórmula para el crecimiento o decrecimiento exponencial está dada por $y(t) = Ae^{kt}$. Para el caso de Radio se sabe que decrece exponencialmente y tiene una vida media de unos 1,600 años aproximadamente (en 1600 se desintegra la mitad). Entonces $R(t)$ representa la desintegración del Radio en el tiempo, con la condición inicial $R(0) = 50\text{ mg}$ y como sabemos del ejercicio anterior en la condición inicial $R(0) = A$, $\therefore A = 50$ por su parte, $R(1600) = 25\text{ mg}$ la condición posterior, se tiene

Cambiando $y(t)$ por $R(t)$, nos queda:

$$R(t) = 50e^{kt}$$

Despejar la constante k , para el tiempo $t = 1600$ nos queda:

$$25 = 50e^{k1600}$$

El 50 pasa con operación contraria:

$$\frac{25}{50} = e^{k1600}$$

Simplificando la fracción $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ y aplicando las propiedades de los logaritmos queda:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k1600 \ln e$$

Despejar k sabiendo que $\ln e = 1$ nos queda:



$$\frac{\ln(1/2)}{1600} = k$$

Entonces la expresión para el Radio que queda al cabo de un tiempo t es:

$$R(t) = 50e^{\frac{\ln(1/2)}{1600}t}$$

Respuesta b): El objetivo es despejar el tiempo t de la fórmula y así determinar el tiempo necesario para que la cantidad de Radio nos quede de 50 mg a 20 mg.

De acuerdo al planteamiento del problema sabemos que:

$$R(t) = 20$$

Sustituyendo en la fórmula queda:

$$20 = 50e^{\frac{\ln(1/2)}{1600}t}$$

El 50 pasa con operación contraria:

$$\frac{20}{50} = e^{\frac{\ln(1/2)}{1600}t}$$

Simplificando la fracción $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ y aplicando las propiedades de los logaritmos queda:

$$\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\ln(1/2)}{1600}t(\ln e)$$

Despejar t sabiendo que $\ln e = 1$ nos queda:

$$\ln\left(\frac{2}{5}\right) \frac{1600}{\ln(1/2)} = t$$

Intercambiando los miembros de la ecuación y resolviendo paréntesis:

$$t = (-0.9162) \left(\frac{1600}{-0.6931} \right)$$
$$t \approx 2115$$

Deben transcurrir aproximadamente 2,115 años para que la cantidad de 50 mg de Radio se reduzca a 20 mg.



4. La tasa de consumo de petróleo al tiempo t es $C'(t) = 16e^{0.08t}$ miles de millones de barriles al año. Si el consumo total de petróleo, del tiempo 0 al tiempo t , es $C(t)$. Calcular la cantidad de petróleo consumido en una década.

Resolución:

$$\frac{dC(t)}{dt} = C'(t)$$

$$dC(t) = C'(t)dt$$

Como $C'(t) = 16e^{0.08t}$ podemos decir que

$$dC(t) = (16e^{0.08t})dt$$

Como se pretende determinar $C(t)$ será necesario integrar la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior:

$$C(t) = \int (16e^{0.08t})dt$$

Aplicando el Teorema 3 parte 3 de la integración: $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$ que para nuestro caso $ax = 0.08t$; $b = 0$; $dx = dt$ no queda.

$$C(t) = 16 \left[\frac{1}{0.08} e^{0.08t} \right] + c$$

Resolviendo paréntesis:

$$C(t) = 200e^{0.08t} + c$$

Para obtener el valor de c sustituimos $t = 0$ cómo situación inicial:

$$C(0) = 200e^{0.08(0)} + c$$

Resolver paréntesis y despejar el valor de c sabiendo que $C(0) = 0$; y $e^{0.08(0)} = 1$

$$0 = 200(1) + c$$

$$-200 = c$$

$$\therefore c = -200$$

Con el valor de c obtenido logramos plantear nuestra fórmula para la determinación de la cantidad de petróleo consumida en una década:

$$C(t) = 200e^{0.08t} - 200$$

Al sustituir el tiempo $t = 10$ nos queda:

$$C(10) = 200e^{0.08(10)} - 200$$



$$C(10) = 200(2.2255) - 200$$

$$C(10) \approx 245$$

Por lo tanto, se sabe que en 10 años se consumen 245 miles de millones de barriles de petróleo.

Ejercicios para resolver:

1. Determinar la función $y = f(x)$ tal que:

a. $f'(x) = \sqrt{2x+1}$ y $f(4) = 15$

b. $f'(x) = (x-1)^3$ en el punto $(3, 0)$

c. $f'(x) = x \cos x$ y $f(\pi/2) = 3\pi/2$

2. En un cultivo hay inicialmente 500 bacterias y después de 4 horas hay 8000. Si este crecimiento es exponencial ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

Utilizar la fórmula general del crecimiento o decrecimiento exponencial:

$$y(t) = Ae^{kt}$$

Respuesta esperada: $y(t) \approx 511\,758$ bacterias

3. El alcohol es uno de los factores de riesgo más frecuentemente implicados en los accidentes de tránsito y la alcoholemia representa el volumen de alcohol que hay en la sangre. la tendencia internacional es ir rebajando la cantidad de alcohol presente en la sangre permitida para conducir, estando en muchos países entre 0.1 y 0.4 g/L

Si la cantidad de alcohol en la sangre se elimina cada hora en un 40% e inicialmente se tiene 1.65 g/L ¿en qué tiempo se reduce a 0.4 g/L?

Utilizar la fórmula general del crecimiento o decrecimiento exponencial:

$$y(t) = Ae^{kt}$$

Respuesta esperada: $t = 2.78$ horas

4. La población de una colonia de bacterias $p(t)$ tiene una razón de cambio en cada momento t , después de iniciar la observación $p'(t) = 350e^{0.18t} + 220e^{-0.3t}$. Si la población era de 250 000 bacterias al inicio de la observación, ¿cuántas bacterias habrá a las 20 horas?



Respuesta esperada: $p(t) \approx 319950$ bacterias

5. La población de un cultivo de bacterias crece proporcionalmente a la cantidad existente en cualquier momento t . Después de 5 horas de iniciar el seguimiento a la población se encontraron 500 bacterias y a las 10 horas hay 5000.

- a) ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias en el cultivo?
b) ¿Cuál era la cantidad de bacterias a las 3 horas?

Respuesta esperada:

- a) 50 bacterias
b) Aproximadamente 200 bacterias.

Unidad III. Cambios acumulados e integral definida



CAMBIOS ACUMULADOS E INTEGRAL DEFINIDA



Propósito de la Unidad

- Calcula integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo, en problemas matemáticos, de las ciencias naturales y de la economía, que le den significado mediante su uso. Aplica la integral definida para cuantificar el área, volumen y la longitud de un segmento de curva en un contexto de las ingenierías y las ciencias, que le den significado mediante su uso.



Núcleos Básicos

- 3.1. Cuantificación de cambios acumulados
- 3.2. El área y la integral definida
- 3.3. Aplicaciones de la integral definida

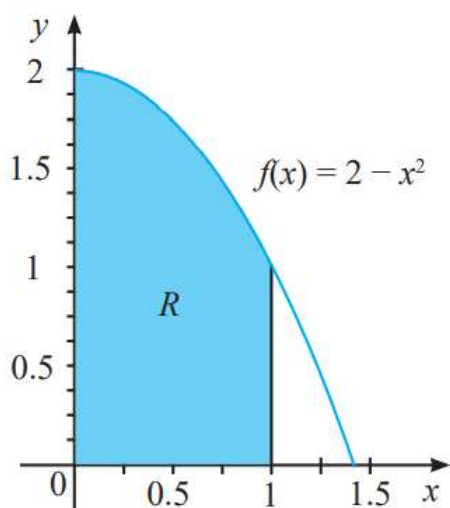


Foro de asesorías de la Unidad III

Cuantificación de cambios acumulados

El área bajo la curva

El cálculo del área de una figura geométrica mediante una fórmula ya establecida, es común en los cursos de geometría, por ejemplo, el área de un triángulo, de un rectángulo o de un trapecio.



Ahora, si la figura tiene una forma irregular, por ejemplo, el área sombreada entre la función $f(x) = 2 - x^2$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[0, 1]$, como se observa en la siguiente gráfica.

Para aproximar el área de la región R , debemos dividirla en rectángulos de igual ancho y sumar sus áreas, a esto se le conoce como acumulación de áreas.

Ahora, **si queremos determinar el área real de la región R** , debemos reducir lo más que se pueda el ancho de cada rectángulo (hacer que el ancho tienda a cero), y calcular el límite de la suma acumulada del área de los rectángulos.

Recordemos que, para determinar el área de un rectángulo, necesitamos conocer la longitud de la base y de la altura, las que representamos como:



El área del rectángulo, es: $A = (\Delta x) f(x)$

Δx es la base

$f(x)$ es la altura

Si las unidades de longitud no se indican, usaremos la letra u , y para el área, unidades cuadradas u^2 .

Para determinar el ancho de la base (Δx) de cada rectángulo, tenemos que partir el intervalo $[0, 1]$ en partes iguales, para ello usamos la fórmula:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Donde:

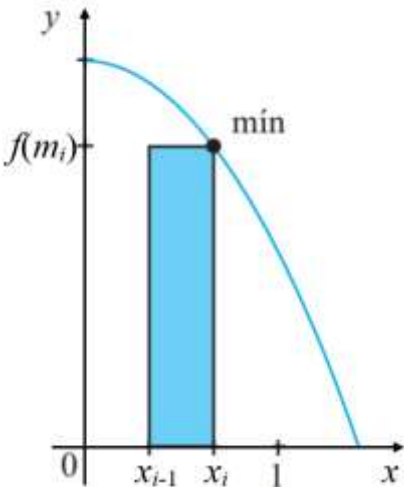
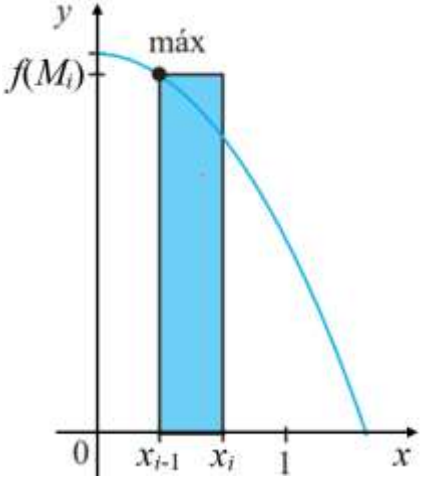
- a es el extremo inferior del intervalo,



- b es el extremo superior del intervalo, y
- n es el número de particiones del intervalo (número de partes iguales en que se divide el intervalo).

Para calcular la altura del cada rectángulo de base Δx , nos basamos en lo siguiente.

Una función continua f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tiene un valor mínimo absoluto $f(m_i)$ y máximo absoluto $f(M_i)$.

Si usamos el valor mínimo absoluto $f(m_i)$ de la partición $[x_{i-1}, x_i]$, la altura de cada rectángulo es el valor mínimo de la función $f(x) = 2 - x^2$ en cada partición del intervalo $[0, 1]$.	Si usamos el valor máximo absoluto $f(M_i)$ de la partición $[x_{i-1}, x_i]$, la altura de cada rectángulo es el valor máximo de la función $f(x) = 2 - x^2$ en cada partición del intervalo $[0, 1]$.
 La altura del rectángulo queda por abajo de la curva y el área calculada la llamamos área inferior ($A_{inferior}$). Al proceso de calcular el área bajo la curva usando la suma acumulada de áreas inferiores, lo llamamos suma inferior.	 La altura del rectángulo queda por arriba de la curva y el área calculada la llamamos área superior ($A_{superior}$). Al proceso de calcular el área bajo la curva usando la suma acumulada de áreas superiores, lo llamamos suma superior.

Para ejemplificar lo anterior, calculemos el área sombreada entre la función $f(x) = 2 - x^2$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[0, 1]$, usando la suma inferior y luego la suma superior para 2 y 4 rectángulos de igual base, y luego, veremos que si incrementamos el número de rectángulos a infinito ($n \rightarrow +\infty$), el $A_{inferior}$ y $A_{superior}$ son iguales al A_{real} de la región R .

Cálculo del área usando dos particiones

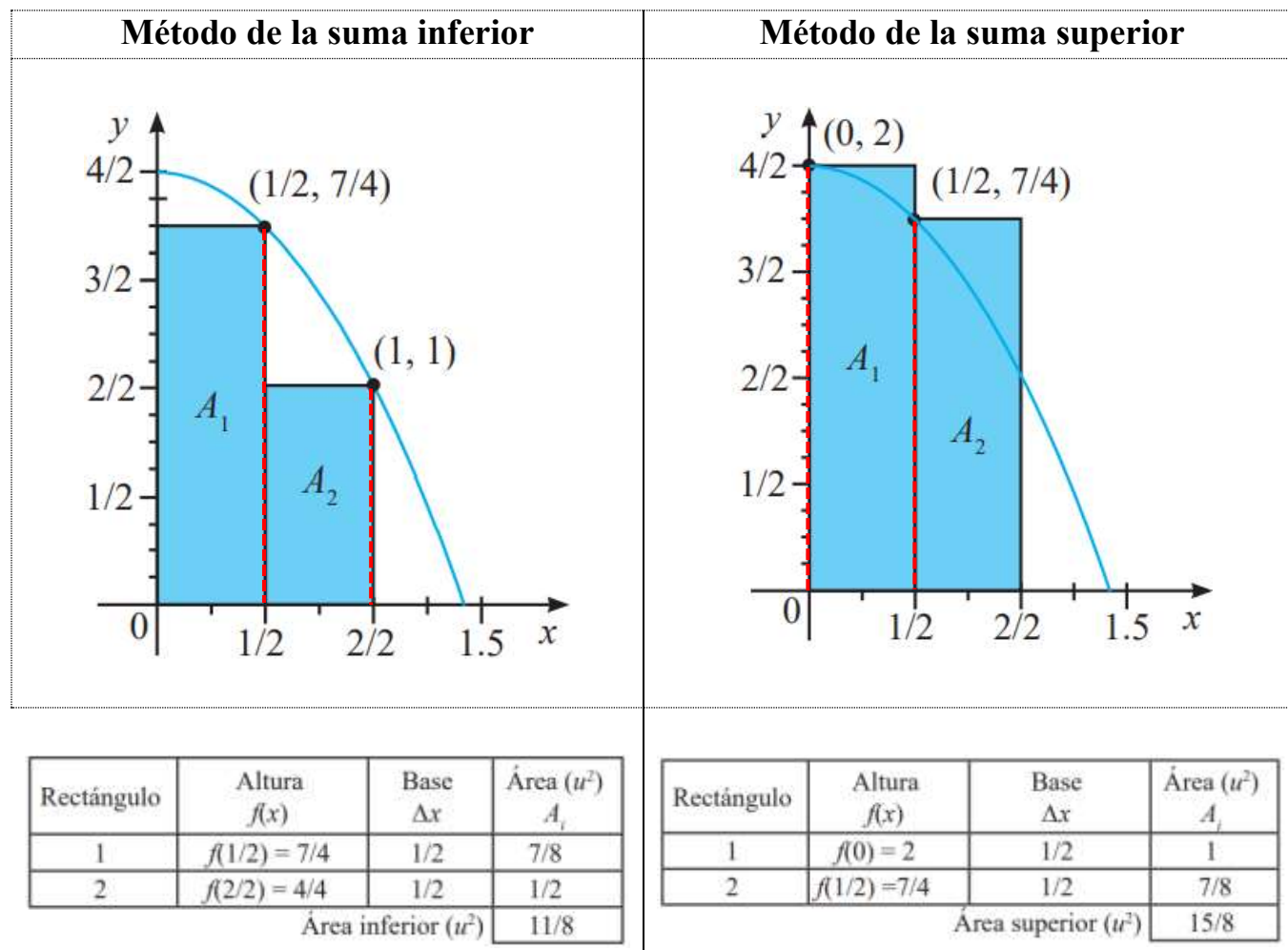
El ancho de base de cada rectángulo (Δx), para $a = 0$, $b = 1$ y $n = 2$, es



$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

La partición del intervalo $[0, 1]$ en dos partes iguales, es: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Vamos a tener dos rectángulos de ancho de base $1/2$ u.



Cálculo del área usando cuatro particiones

El ancho de base de cada rectángulo (Δx), para $a = 0$, $b = 1$ y $n = 4$, es

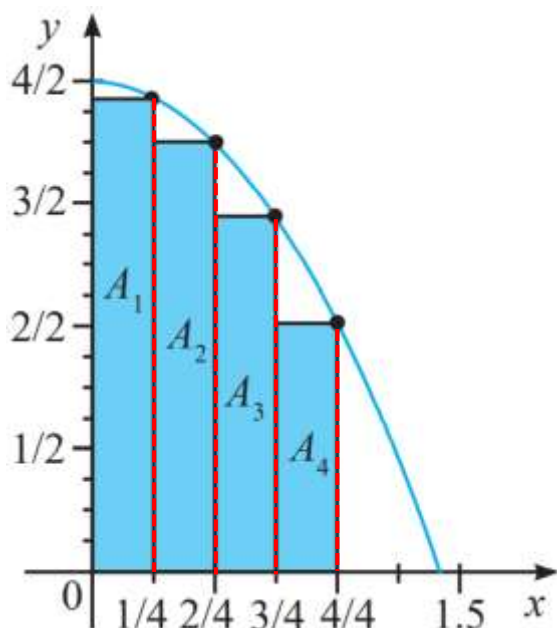
$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} u$$

La partición del intervalo $[0, 1]$ en cuatro partes iguales, es: $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Vamos a tener cuatro rectángulos de ancho de base $1/4$ u.

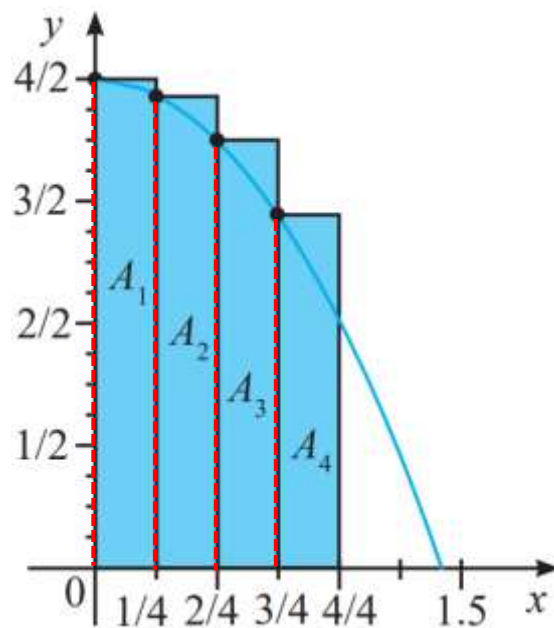


Método de la suma inferior



Rectángulo	Altura $f(x)$	Base Δx	Área (u^2) A_i
1	$f(1/4) = 31/16$	$1/4$	$31/64$
2	$f(2/4) = 7/4$	$1/4$	$7/16$
3	$f(3/4) = 23/16$	$1/4$	$23/64$
4	$f(4/4) = 4/4$	$1/4$	$1/4$
Área inferior (u^2)			$49/32$

Método de la suma superior



Rectángulo	Altura $f(x)$	Base Δx	Área (u^2) A_i
1	$f(0) = 2$	$1/4$	$1/2$
2	$f(1/4) = 31/16$	$1/4$	$31/64$
3	$f(2/4) = 7/4$	$1/4$	$7/16$
4	$f(3/4) = 23/16$	$1/4$	$23/64$
Área superior (u^2)			$57/32$

Si usamos más y más rectángulos de igual base, pero cada vez más delgados, aumentamos la exactitud de la aproximación del área de la región R .

Número de rectángulos	Δx	A_{inferior}	A_{superior}
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{8} u^2$	$\frac{15}{8} u^2$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{49}{32} u^2$	$\frac{57}{32} u^2$
n	$\frac{1}{n}$	$\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$	$\frac{5}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$
$n \rightarrow +\infty$	$\frac{1}{n} \rightarrow 0$	$\frac{5}{3} u^2$	$\frac{5}{3} u^2$



De la tabla anterior, vemos que es en el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ que se obtiene el área real, es decir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{inferior} = A_{\text{real}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{superior}.$$

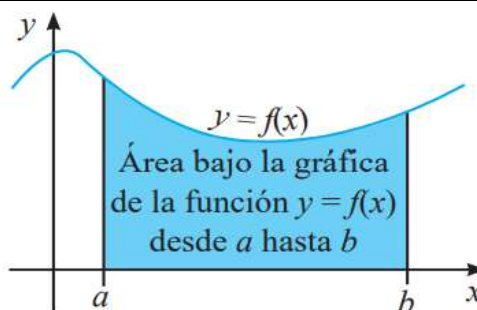
Por lo que el área real de la región R , es $5/3 u^2$.



El área bajo la curva aplicada en diversos contextos y su interpretación

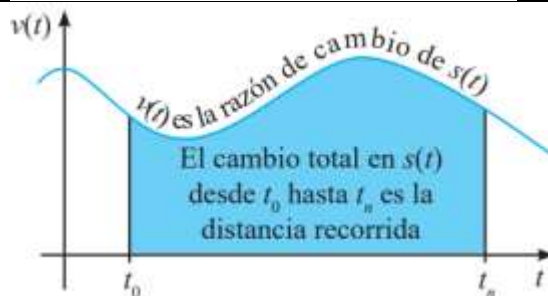
El área bajo la curva en un contexto matemático

En la gráfica de la derecha, se representa el área entre el eje x , la gráfica de $f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



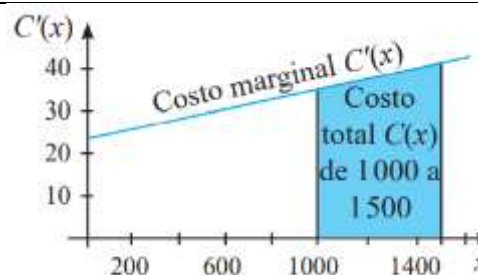
El área bajo la curva en un contexto físico

En la gráfica de la derecha, la función $v(t)$ representa la razón de cambio del desplazamiento $s(t)$, y el área bajo la gráfica es el cambio total en el desplazamiento $s(t)$ en $[t_0, t_n]$, es decir, la distancia recorrida desde t_0 hasta t_n , siempre que $v(t) \geq 0$.



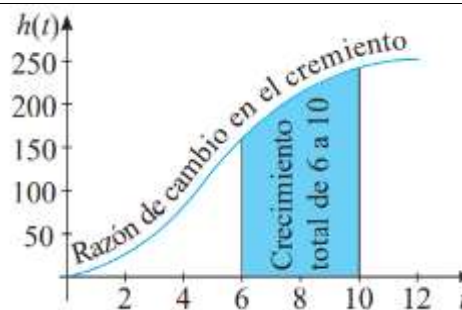
El área bajo la curva en un contexto de economía

El cambio en el costo total de producción $C(x)$ al incrementar el nivel de producción de 1000 a 1500 unidades es igual al área bajo la gráfica de la función de costo marginal $C'(x) = 23.5 + 0.01x$ entre $x = 1000$ y $x = 1500$.



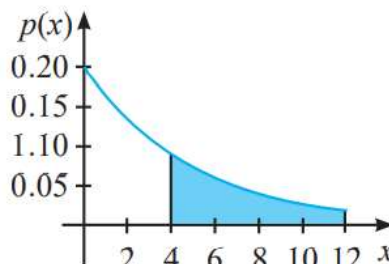
El área bajo la curva en un contexto de biología

La función $h(t)$ es la razón de cambio en el crecimiento de una planta de girasol, y el área bajo la gráfica $h(t)$ desde $t = 6$ a $t = 10$ semanas representa el crecimiento total (cm) de la planta de girasol desde la sexta hasta la décima semana.



El área bajo la curva en un contexto de probabilidad

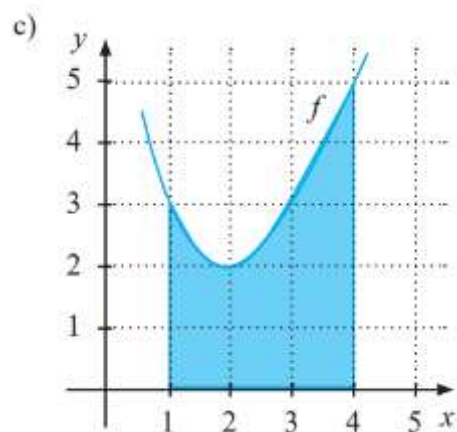
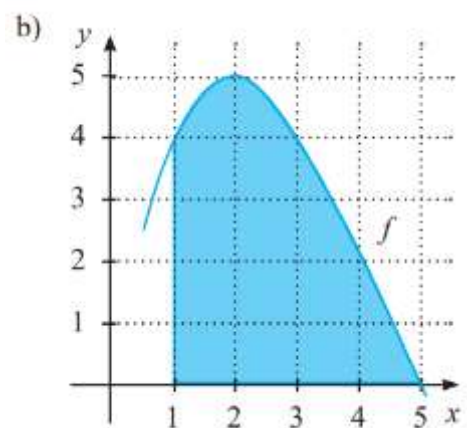
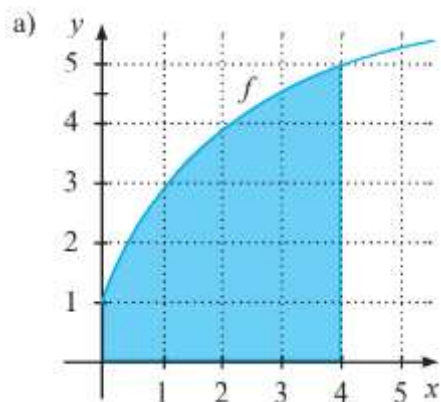
Si $p(x)$ es una función de densidad, el área bajo la gráfica $p(x)$ desde $x = 4$ a $x = 12$ representa la probabilidad $P(4 \leq X \leq 12)$.





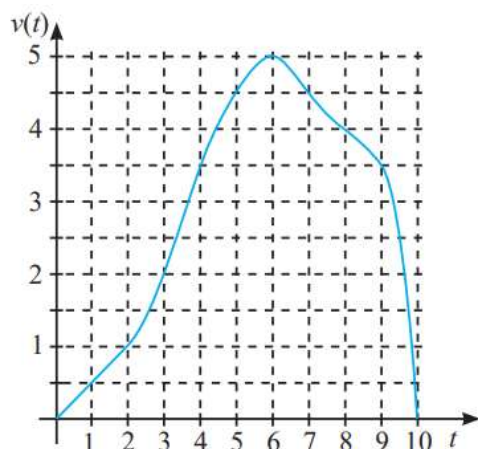
Ejercicios:

1. Aproxima la región sombreada usando la suma inferior y superior con rectángulos de una unidad de ancho.

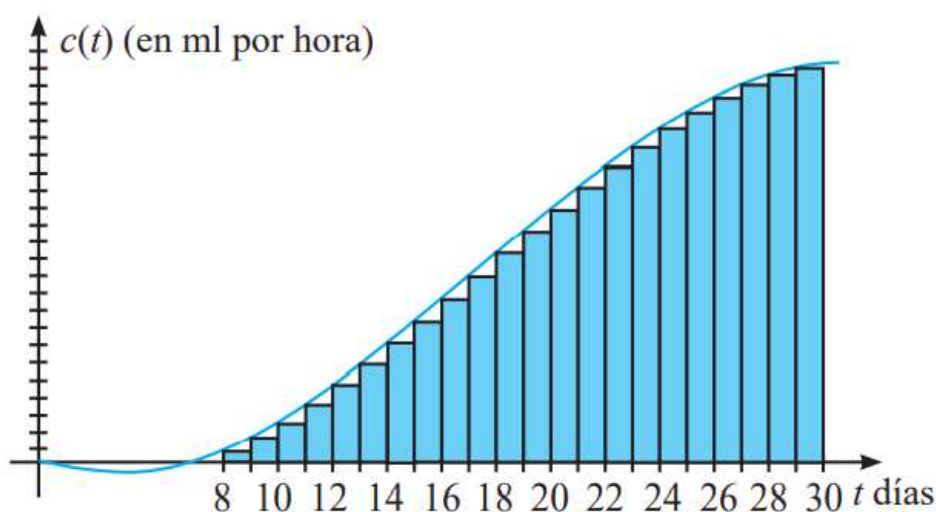




2. En la siguiente gráfica se muestra la velocidad (en m/s) de un objeto en movimiento rectilíneo desde $t = 0$ hasta $t = 10$ segundos. Aproxima mediante la suma inferior y superior la distancia recorrida por el objeto en los 10 segundos, usa intervalos de tiempo de un segundo.



- a) Aproxima mediante la suma inferior y superior la distancia recorrida por el objeto en los 10 segundos, usa intervalos de tiempo de un segundo.
- b) ¿Cómo se puede obtener el resultado real para el área bajo la gráfica de $v(t)$ de $t = 0$ a $t = 10$?
3. El consumo de oxígeno de un embrión de ave aumenta desde que se pone el huevo hasta que nace el polluelo. En un ave común, la razón del consumo de oxígeno se puede modelar mediante la función $c(t)$ representada gráficamente, donde t es el tiempo en días a partir de que se puso el huevo. Un huevo común eclosiona más o menos cuando $t = 28$ días.



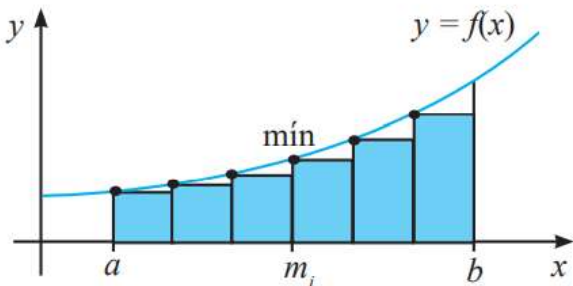
- a) ¿A qué corresponde el área de cada rectángulo marcado?
- b) ¿A qué corresponde la suma de las áreas de los dos primeros rectángulos?
- c) ¿Qué representa el área total debajo de la curva?



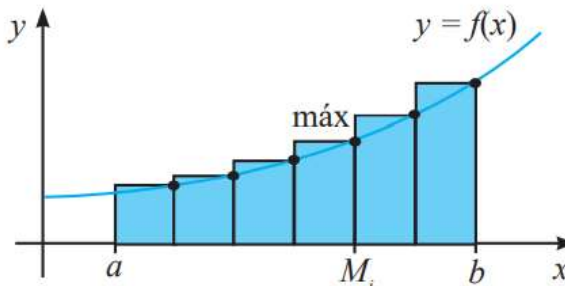
Semana 14: El área y la integral definida

La integral definida

Para calcular el área entre el eje x , y la gráfica de $f(x)$ sobre $[a, b]$, dos de los métodos que usamos, son: la suma inferior y la suma superior.



$$\text{Suma inferior } A_{\text{inferior}} = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x$$



$$\text{Suma superior } A^{\text{superior}} = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x$$

Si al aproximar a infinito el número de **rectángulos de igual base** se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x = A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x,$$

decimos que **la función f es integrable** sobre el intervalo $[a, b]$, y la denotamos como

$$\int_a^b f(x) dx,$$

y se lee **integral definida de $f(x)$ desde a hasta b** .

Las funciones que vamos a integrar son continuas en el intervalo $[a, b]$, y por ser continuas, también son integrables en $[a, b]$.

Definición (Integral definida). Sea f una función continua sobre $[a, b]$. La **integral definida** de f desde a hasta b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, es el número

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

donde a es el **límite de integración inferior** y b el **límite de integración superior**.

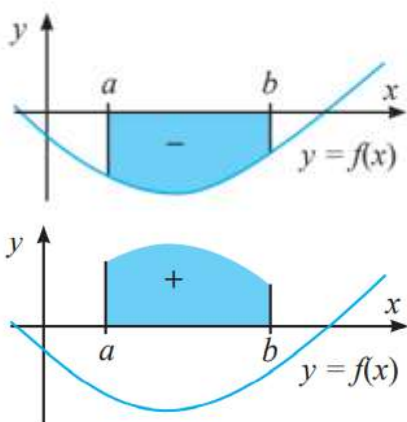
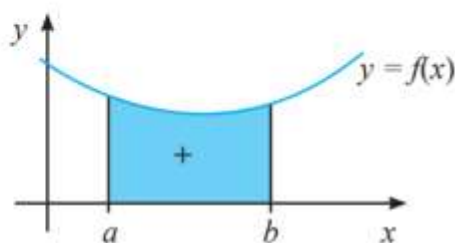


En la expresión $\int_a^b f(x) dx$, la única restricción para $f(x)$ es que sea continua en $[a, b]$, por lo que **la función puede ser positiva** ($f(x) \geq 0$) **o negativa** ($f(x) \leq 0$) en $[a, b]$.

En la figura de la derecha, $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, por lo que la integral definida es un número no negativo y

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

calcula el área geométrica.



En la figura de la izquierda, $f(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, por lo que la integral definida es un número negativo y

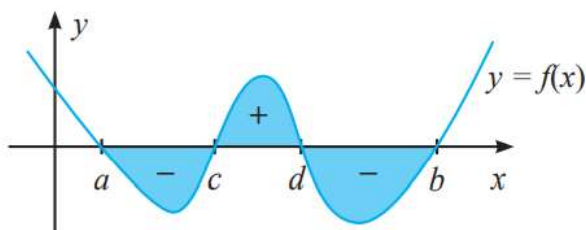
$$\int_a^b f(x) dx$$

no calcula el área geométrica.

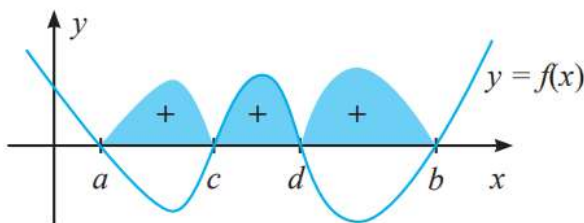
En este caso, para calcular el área geométrica, usamos

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \text{ o } A = -\int_a^b f(x) dx.$$

En conclusión, $\int_a^b f(x) dx$ calcula el **área con signo**.



Si queremos calcular el **área total** (área geométrica entre el eje x , la gráfica de $f(x)$ desde a hasta b), en los intervalos $[a, c]$ y $[d, b]$ debemos usar $\int_a^c |f(x)| dx$ y $\int_d^b |f(x)| dx$ respectivamente, debido a que ahí $f(x) \leq 0$.

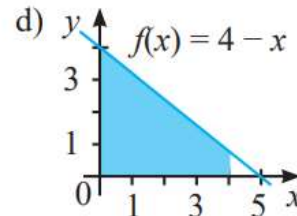
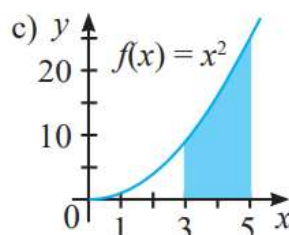
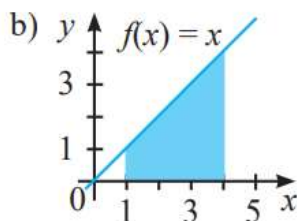
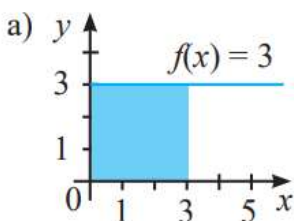


$$A = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$$

Ejercicios:

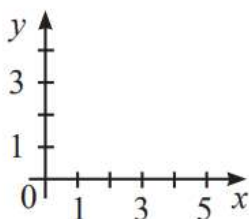


1. Formula una integral definida que represente el área de la región sombreada (no evaluar la integral).

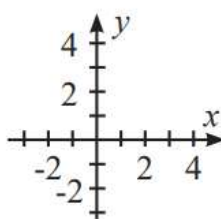


2. Dibuja la región cuya área está dada por la integral definida.

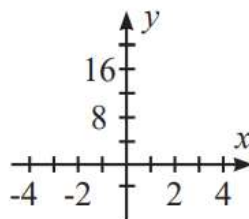
a) $\int_2^4 3 dx$



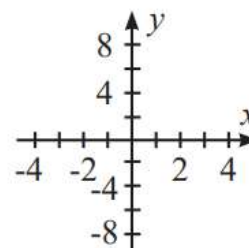
b) $\int_{-2}^3 x dx$



c) $\int_{-4}^4 x^2 dx$



d) $\int_{-2}^2 x^3 dx$



3. Usa los siguientes resultados: $\int_{-5}^4 f(x) dx = 8$ y $\int_4^6 f(x) dx = -3$ para calcular el área total entre el eje x , la gráfica de $f(x)$ y las rectas verticales $x = -5$ y $x = 6$.

Propiedades de la integral definida

A continuación veremos cinco propiedades de la integral definida y las demostraremos usando la definición.

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, k un número real y $c \in [a, b]$.

1. Si el ancho del intervalo es igual a cero, la integral definida es igual a cero:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

2. Si se intercambian los límites de integración, se obtiene el número opuesto:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

3. Un factor constante ($k \in R$) se puede extraer de la integral definida:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

4. Propiedad aditiva: si $c \in [a, b]$



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5. La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Ejercicios

1. Usa los siguientes resultados: $\int_{-5}^4 f(x) dx = 8$, $\int_4^6 f(x) dx = -3$ y $\int_4^6 g(x) dx = 9$ para calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^1 f(x) dx$

b) $\int_{-5}^4 3f(x) dx$

c) $\int_{-5}^6 f(x) dx$

d) $\int_4^6 [f(x) + g(x)] dx$

e) $\int_6^4 g(x) dx$

Teorema Fundamental del cálculo

Calcular la integral definida como el límite de sumas es laborioso, como lo experimentamos en la sección anterior. Una forma más fácil de calcularla aplicando Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona la integral definida con la primitiva o antiderivada de una función continua en un intervalo cerrado.

Segundo teorema fundamental del cálculo (STFC). Sea f una función continua sobre $[a, b]$, y F una antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

El STFC, también es conocido como regla de Barrow, la cual muestra el procedimiento a seguir para calcular la integral definida mediante la antiderivada o primitiva.

Regla de Barrow para calcular $\int_a^b f(x) dx$

1. Encontrar una antiderivada o primitiva F de f .
2. Evaluar $F(b)$ y $F(a)$
3. Calcular el número $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Ejemplos:



Calcula la integral definida de las siguientes funciones en el intervalo indicado y determina si el resultado representa o no el área geométrica.

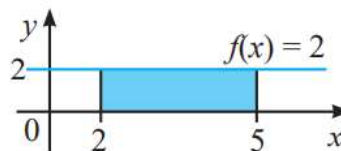
1. $f(x) = 2$ en $[2, 5]$

$F(x) = 2x$ es una primitiva de $f(x)$, pues $F'(x) = 2$

$$F(5) = 2(5) = 10 \text{ y } F(2) = 2(2) = 4$$

$$\int_2^5 2 dx = 2x \Big|_2^5 = 10 - 4 = 6$$

En la gráfica, $f(x) = 2 > 0$ en $[2, 5]$. En este caso, la integral definida calcula el área geométrica y es $6 u^2$.



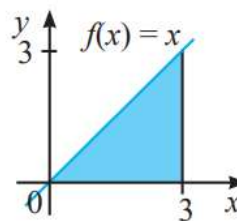
2. $f(x) = x$ en $[0, 3]$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = x$

$$F(3) = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} \text{ y } F(0) = \frac{0^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\int_0^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$

Dado que $f(x) = x \geq 0$ en $[0, 3]$, la integral definida calcula el área geométrica y es $4.5 u^2$.

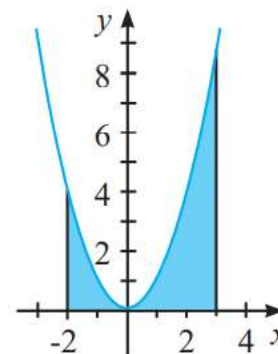


3. $f(x) = x^2$ en $[-2, 3]$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ es la primitiva de $f(x)$, dado que $F'(x) = x^2$

$$F(3) = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3} \text{ y } F(-2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{27}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{27}{3} + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$$



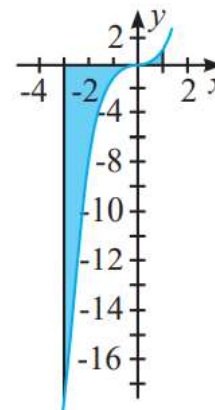
Ya que $f(x) \geq 0$ en $[-2, 3]$, la integral definida calcula el área geométrica y es $35/3 u^2$.

4. $f(x) = x^3$ en $[-3, 1]$

$F(x) = \frac{x^4}{4}$ es la primitiva de $f(x)$, dado que $F'(x) = x^3$

$$F(1) = \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4} \text{ y } F(-3) = \frac{(-3)^4}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\int_{-3}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-3}^1 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -\frac{80}{4} = -20$$



Debido a que $f(x) \leq 0$ en $[-3, 0]$, la integral definida no calcula el área geométrica.



Veamos más ejemplos de integrales definidas, pero ahora haremos los cálculos más directos.

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_{-2}^3 (3x^2 - 5x + 7) dx &= \left[x^3 - \frac{5x^2}{2} + 7x \right]_{-2}^3 = 3^3 - \frac{5(3)^2}{2} + 7(3) - \left[(-2)^3 - \frac{5(-2)^2}{2} + 7(-2) \right] \\ &= 27 - \frac{45}{2} + 21 - [-8 - 10 - 14] = \frac{51}{2} - [-32] = \frac{115}{2} \end{aligned}$$

$$2. \quad \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_0^8 = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \Big|_0^8 = \frac{3\sqrt[3]{8^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{0^4}}{4} = 12 - 0 = 12$$

$$3. \quad \int_0^{2\pi} (3x + \cos x) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \sin x \right]_0^{2\pi} = \frac{3(2\pi)^2}{2} + \sin(2\pi) - \left[\frac{3(0)^2}{2} + \sin 0 \right] = 6\pi^2 - 0 = 6\pi^2$$

$$4. \quad \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \Big|_0^2 = \frac{e^{3(2)}}{3} - \frac{e^{3(0)}}{3} = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^6 - 1}{3}$$

Ejercicios:

1. Calcula el área:

a) $\int_0^3 2 dx$

b) $\int_{-2}^1 5x dx$

c) $\int_1^2 x^2 dx$

d) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

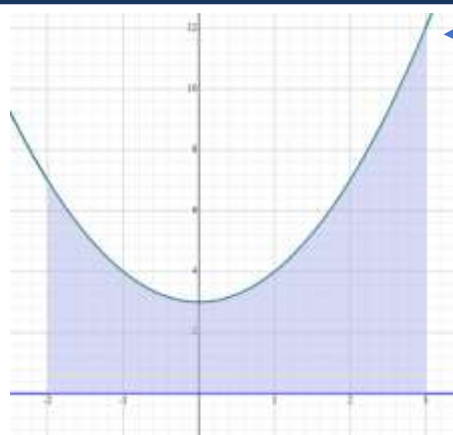
e) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$

f) $\int_1^{43} 2e^{2x} dx$

g) $\int_0^4 2^{3x} dx$

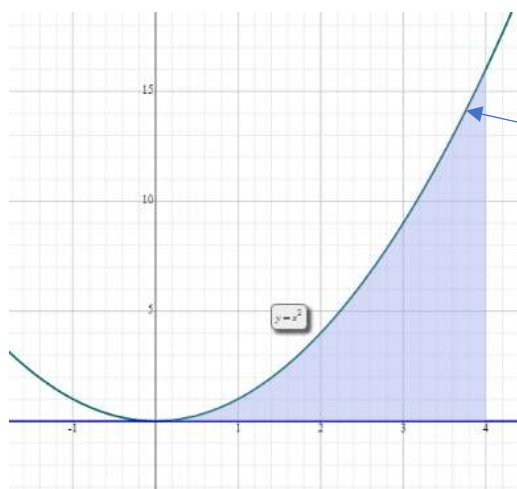
2. Determina el área sombreada:

a) Calcula el área limitada por el eje x , las rectas verticales $x = -2$, $x = 3$ y la función $f(x) = x^2 + 3$.



$f(x) = x^2 + 3$

b) Calcula el área bajo la curva de $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 4$



$f(x) = x^2$



Cálculo del área bajo una curva

El teorema fundamental del cálculo, como ya aprendiste, permite calcular el área bajo una curva que esté delimitada por esta, el eje de las abscisas y dos rectas perpendiculares al eje x de las abscisas. Vamos a continuar aplicando el concepto de integral definida al cálculo de más áreas, en particular cuando no se dispone de los límites de integración, así como al cálculo del área entre dos curvas y al cálculo del volumen de determinadas figuras.

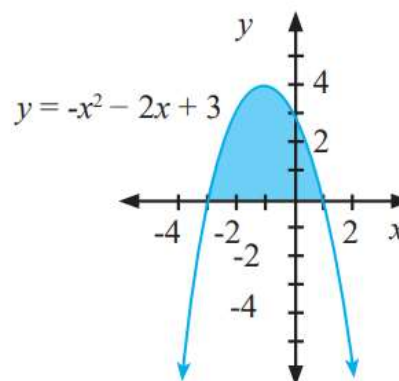
Veamos dos ejemplos, uno donde es área a calcular está por arriba del eje de las abscisas y otro en el que está por abajo.

Ejemplo 1. Calculemos el área bajo la curva $y = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x . Si bien no están explícitos los límites de integración, podemos obtenerlos calculando los ceros de la función.

$$y = -x^2 - 2x + 3 = -(x + 3)(x - 1)$$

Por tanto $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$, luego

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{27}{3} - 9 - 9 \right) = \frac{5}{3} + 9 \\ &= \frac{32}{3} u^2 \end{aligned}$$



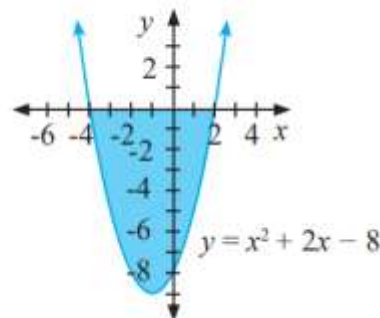
Ejemplo 2. Vamos a calcular el área delimitada por la curva $y = x^2 + 2x - 8$ y el eje x . Como se puede apreciar en la figura, esta área está por debajo del eje x , y los valores de y en el área sombreada son negativos, por tanto, el área buscada está dada por

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + 2x - 8) dx$$

$$y = x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

Por tanto $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$, luego $A = - \int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$

$$\begin{aligned} A &= - \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2 = - \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 16 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 32 \right) \right] \\ &= 36 u^2 \end{aligned}$$

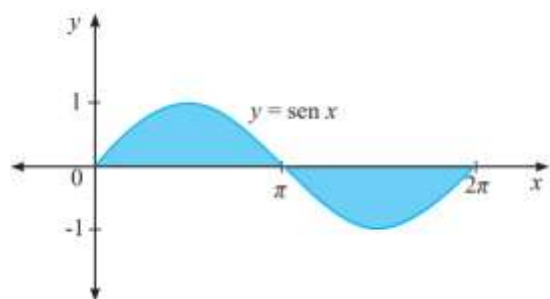


A continuación, veamos un ejemplo en el que el área este tanto por abajo como por arriba del eje x .



Ejemplo 3. Supongamos ahora que queremos obtener el área delimitada por la gráfica de la función $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ y el eje de las abscisas, es decir el área total.

Como puedes observar en la figura, una parte de la superficie sombreada está por debajo del eje x . En situaciones como esta, ya conoces que se subdividen los intervalos en los cuales se calcula la integral definida y en el intervalo en que la función es negativa, se considera su valor absoluto. La función seno cambia de signo a partir de $x = \pi$, luego para este caso:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| \, dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = -[(-1) - 1] + [1 - (-1)] \\ &= 4 \, u^2 \end{aligned}$$

Un cálculo para determinar el área que abarca esta función sin tener en cuenta los intervalos donde la curva cambia de signo sería erróneo, pues

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

lo cual no se corresponde con el área de la región sombreada. Ello se debe a que en este caso el área sombreada bajo el eje x es igual, pero con valor negativo al área sombreada sobre el eje x .

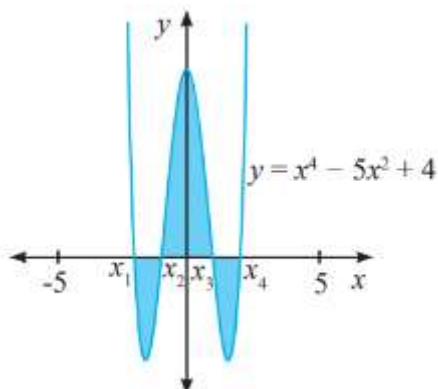
Cuando una función continua $f(x)$ cambia de signo en un intervalo cerrado $[a, b]$, para determinar el área entre la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en tantos subintervalos, como determinen las raíces de la función $f(x)$ y los extremos a y b del intervalo. Se calcula el área correspondiente a cada subintervalo, considerando el valor absoluto en los casos en que la función sea negativa sobre alguno de ellos y el área total se obtiene sumando las áreas parciales, aplicando las propiedades de la integral.

Si $f(x)$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y $x_1, x_2, \dots, x_n$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, son raíces de la función $f(x)$, entonces el área de la región limitada por la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx = \int_a^{x_1} |f(x)| \, dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \, dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| \, dx$$



Ejemplo 4. Calcular el área bajo la curva $y = x^4 - 5x^2 + 4$. Como se puede apreciar en la gráfica hay segmentos en los que la curva está por debajo del eje x , luego es negativa, aspecto que hay que tener en cuenta para calcular el área total.



Aplicando la factorización por agrupación a la expresión

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 &= x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) \\&= (x^2 - 1)(x^2 - 4)\end{aligned}$$

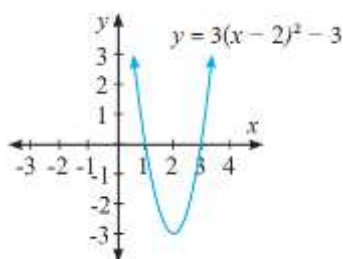
Entonces, la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ tiene como ceros $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Entonces, para calcular el área bajo esta curva, consideramos la suma de las siguientes integrales:

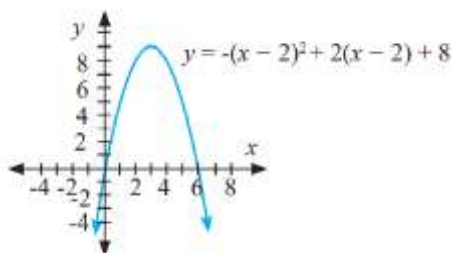
$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \int_{-2}^{-1} |x^4 - 5x^2 + 4| dx + \int_{-1}^1 |x^4 - 5x^2 + 4| dx + \int_1^2 |x^4 - 5x^2 + 4| dx \\&= -\int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4) dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx - \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \\&= -\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4x\right]_1^2 \\&= \frac{22}{15} + \frac{76}{15} + \frac{22}{15} = 8 u^2\end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Dada la figura adjunta, sombrea la superficie determinada por la gráfica de la función y el eje x y calcula el área correspondiente.

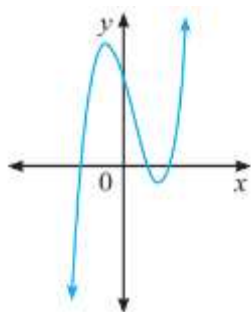


2. Calcula el área de la superficie determinada por la función $y = -(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 8$ y el eje x .





3. Calcula el área bajo la curva que representa la función $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ y el eje x , determinando previamente los ceros de dicha función



4. Calcula el área bajo la curva en cada caso. Haz previamente la representación gráfica.

a) $\int_{-1}^1 e^{x-1} dx$

b) $\int_2^6 (x^2 - 8x + 12) dx$

c) $\int_1^7 (x^2 - 7x + 10) dx$

5. Hallar el área comprendida entre $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x .

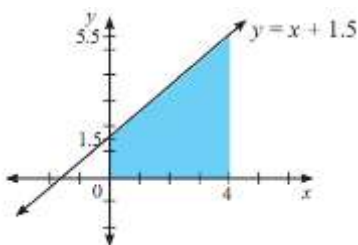
6. Calcula el área delimitada por $y = -x^3 + 4x$ y el eje x en el intervalo $[-3, 3]$



Área comprendida entre dos curvas

Bajo el término área bajo una curva hemos calculado el área de la superficie determinada por la gráfica de una función continua, el eje x y dos rectas $x = a$ y $x = b$, las que eventualmente pueden reducirse a los puntos a y b extremos del intervalo sobre el cual se integra y en ese caso constituyen ceros de la función que se integra. Así, por ejemplo:

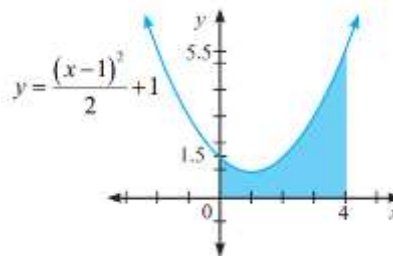
Si consideramos la función $y = x + 1.5$, el área bajo la curva que describe esta función entre $x = 0$ y $x = 4$, se representa en la gráfica siguiente:



Por tanto, el área bajo la recta está dada por

$$A_r = \int_0^4 (x + 1.5) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1.5x \right]_0^4 = 14 \, u^2$$

Sea ahora la función $y = \frac{(x-1)^2}{2} + 1$. El área bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 4$, se representa por:

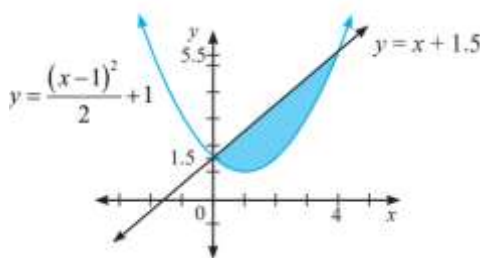


Así, el área bajo la parábola está dada por

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^4 \left[\frac{(x-1)^2}{2} + 1 \right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{6} + x \right]_0^4 \\ &= \left(\frac{3^3}{6} + 4 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{6} + 0 \right) = \frac{51}{6} + \frac{1}{6} = \frac{26}{3} \, u^2 \end{aligned}$$

Para ilustrar el significado de área comprendida entre dos curvas vamos ahora a superponer las dos gráficas anteriores.

Así, la zona sombreada representa una superficie que está determinada por las dos curvas y por los puntos en que estas se intersectan.



De esta manera, podemos calcular el área A que resulta, como la diferencia entre las dos áreas obtenidas previamente.

Por tanto, se tiene que

$$A = A_r - A_p = 14 - 26/3 = 16/3 \, u^2$$

Este resultado está dado por las expresiones de las integrales definidas calculadas por separado

$$A = \int_0^4 (x + 1.5) \, dx - \int_0^4 \left[\frac{(x-1)^2}{2} + 1 \right] dx$$

Aplicando las propiedades de la integral se obtiene



$$A = \int_0^4 \left[x + 1.5 - \left(\frac{(x-1)^2}{2} + 1 \right) \right] dx$$

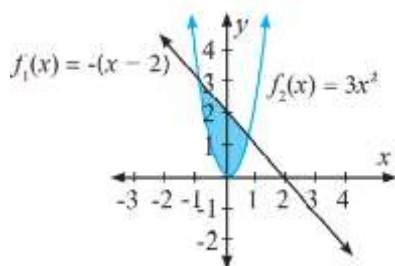
Es decir, el área se obtiene calculando la integral definida correspondiente a la diferencia entre las dos funciones; en este caso la recta que está en la parte superior y la parábola que está por debajo en la zona resultante, aunque de haberse planteado la diferencia al revés hubiese dado un valor negativo y habría que tomar el valor absoluto, ya que toda área es positiva. En dependencia de las funciones consideradas también las gráficas resultantes pueden estar, una o ambas, por debajo del eje x , por lo que de manera general se debe tomar el valor absoluto de la diferencia entre las funciones.

Entonces, podemos resumir que:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y x_1, x_2 son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de estas dos funciones, entonces el área comprendida entre ambas está dada por

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$$

Ejemplo. Calcular el área de la región limitada por las curvas dadas por $f_1(x) = -(x-2)$ y $f_2(x) = 3x^2$.



Vamos a calcular primero las abscisas de los puntos en que se intersecan ambas curvas y para ello resolvemos la ecuación $3x^2 + x - 2 = 0$.

$$3x^2 + x - 2 = (x + 1)(3x - 2) = 0, \text{ de donde } x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 2/3.$$

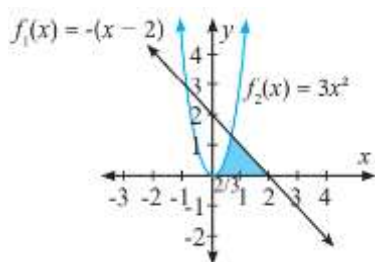
En el intervalo $[-1, 2/3]$ se tiene que $f_1(x) > f_2(x)$. Por tanto, el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2/3} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_{-1}^{2/3} [f_1(x) - f_2(x)] dx \\ &= \int_{-1}^{2/3} [-(x-2) - 3x^2] dx = - \int_{-1}^{2/3} [3x^2 + x - 2] dx \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de las integrales, tenemos

$$\begin{aligned} A &= - \left[3 \int_{-1}^{2/3} x^2 dx + \int_{-1}^{2/3} x dx - 2 \int_{-1}^{2/3} dx \right] = - \left[3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2/3} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2/3} - [2x]_{-1}^{2/3} \right] \\ &= - \left[3 \frac{35}{81} + \left(-\frac{5}{18} \right) - \frac{10}{3} \right] = - \left[\frac{70-15-180}{54} \right] = \frac{125}{54} u^2 \end{aligned}$$

Con estas mismas funciones y sobre la misma gráfica podemos también ahora calcular el área de la región entre ellas y el eje x , que aparece sombreada en la siguiente figura.

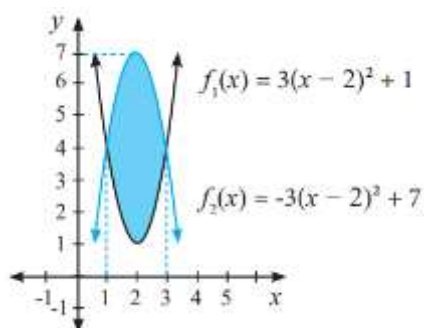


En este caso se consideran dos subintervalos: el primero $[0, 2/3]$, correspondiente a la curva $y = 3x^2$ y el segundo $[2/3, 2]$ correspondiente a $y = -(x-2)$. El área A estará dada por:

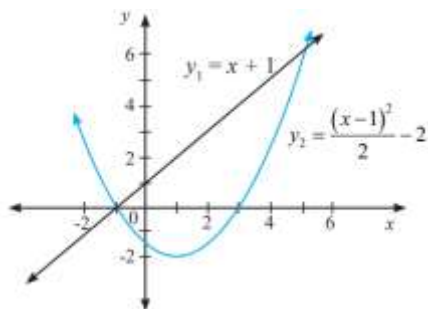
$$A = \int_0^{2/3} 3x^2 dx + \int_{2/3}^2 [-(x-2)] dx = \left[3 \frac{x^3}{3} \right]_0^{2/3} - \left[\frac{(x-2)^2}{2} \right]_{2/3}^2$$
$$= \frac{8}{27} + \frac{8}{9} = \frac{32}{27} u^2$$

Ejercicios.

1. Calcula el área de la región comprendida entre las funciones $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ y $f_2(x) = -3(x-2)^2 + 7$ como aparece en la figura.



2. Dada la figura en la que aparecen las curvas $y_1 = x + 1$ y $y_2 = \frac{(x-1)^2}{2} - 2$:



- a) Calcular el área determinada por la curva $y_2 = \frac{(x-1)^2}{2} - 2$ y el eje x .
 - b) Calcular el área de la región que se obtiene entre las dos curvas.
 - c) Calcular el área de la región que se obtiene entre las dos curvas y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.
3. Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y_1 = 4$ y $y_2 = x^2$.
 4. Dibuja un esquema con la representación gráfica de las curvas $y_1 = x^3$ y $y_2 = x$. Calcula el área de la región entre esas dos curvas.
 5. Calcula el área de la superficie limitada por las gráficas de $y_1 = x + 2$ y $y_2 = x^2$.
 6. Calcula el área de la región entre $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = x^2$.
 7. Dibuja las gráficas de las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = 2 - x$. Calcula el área de la zona entre las curvas que describen estas dos funciones y el eje x .